

# ÜBER VIÈTES KONSTRUKTION DES REGELMÄSSIGEN SIEBENECKS

von

Jos. E. Hofmann\*

1. Schon die antiken Mathematiker haben sich mit der Konstruktion des regelmäßigen Siebenecks beschäftigt. Nachdem die Konstruktion des regelmäßigen Fünfecks und des aus Gründen der Figurenmystik bedeutsamen Sternfünfecks gelungen war — anfangs wohl bewegungsgeometrisch<sup>1</sup>, dann durch eine Konstruktion mit Zirkel und Lineal<sup>2</sup> —, versuchte man sich auch am Siebeneck, kam aber anfangs mangels passender algebraischer Ausdrucksweise nicht recht weiter. Erst Archimedes wurde mit dem für die damalige Zeit sehr schwierigen Problem fertig<sup>3</sup>. Er führte es auf eine Flächengleichheit zurück, aus der sich die Lösung durch Schneiden einer Parabel mit einer gleichseitigen Hyperbel ergibt.

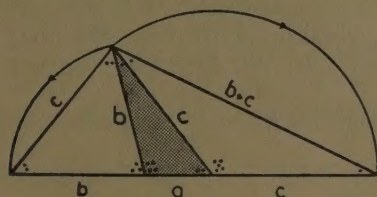


Abb. 1. Zur Siebeneckskonstruktion nach Archimedes.

Ausgangspunkt ist die Konstruktion eines Dreiecks, dessen Winkel  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  sich wie 1:2:4 verhalten. Aus den nach Erweitern des Dreiecks sich ergebenden Ähnlichkeitsbeziehungen (Abb. 1) folgt

$$(1,1) \quad b^2 = a(a + c), \quad c^2 = b(a + b).$$

\* (13 b) Ichenhausen/Schw., Heinr.-Sinzstrasse 15, Bayern, Deutschland.

Dieses Gleichungspaar taucht wieder auf bei G. Cardano<sup>4</sup>, der wahrscheinlich arabischer Überlieferung folgt<sup>5</sup>. Entfernen wir  $a$ , so ergibt sich mit L. Pacioli<sup>6</sup>

$$(1,2) \quad b^3 + 2b^2c - bc^2 - c^3 = 0.$$

Entfernen wir  $c$ , so erhalten wir mit L. Ferrari (Mitteilung Cardanos):

$$(1,3) \quad b^3 - ab^2 - 2a^2b + a^3 = 0.$$

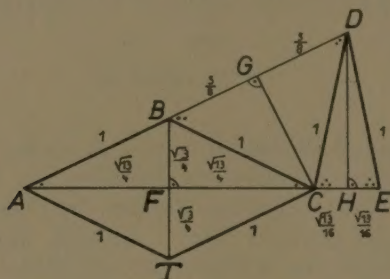


Abb. 2. Zur Heronischen Näherungskonstruktion des regelmäßigen Siebenecks.

2. Auch Näherungskonstruktionen für das regelmäßige Siebeneck sind sehr alt. Die einfache Regel, daß die Seite  $s_7$  des Siebenecks im Kreis des Halbmessers  $r$  ungefähr gleich der Höhe des gleichseitigen Dreiecks mit der Seite  $r$  ist, steht bei Heron von Alexandria<sup>7</sup>; Varianten dieser Näherung finden sich bei mehreren Renaissance-Mathematikern<sup>8</sup>.

Abb. 2 zeigt uns, wie sich die Art dieser Näherung ohne Verwendung einer Tafel erkennen läßt: Wir beginnen etwa mit der Raute  $ABCT$

(Seite 1, kürzere Diagonale  $BT = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ) und ziehen die längere Diagonale  $AC = \frac{\sqrt{13}}{2}$ . Dann ist  $\angle BAT = 2\varphi$  der Näherungswinkel an der Spitze

eines der sieben gleichschenkligen Dreiecke wie  $BAT$ , aus denen sich das regelmäßige Siebeneck (Seite  $BT$ ) im Einheitskreis um  $A$  zusammensetzt;

$\cos \varphi = \frac{\sqrt{13}}{4}$ . Das Lot  $GC$  auf die verlängerte  $AB$  erzeugt den Abschnitt

$AG = \frac{13}{8}$ ; also ist  $BG = \frac{5}{8}$ . Der Einheitskreis um  $C$  durch  $B$  schneidet

die weiter verlängerte  $AG$  so in  $D$ , daß  $GD = BG = \frac{5}{8}$ ; also ist  $AD = \frac{9}{4}$ .

Das Lot  $DH$  aus  $D$  auf die verlängerte  $AC$  schneidet diese so in  $H$ , daß  $AH = \frac{9}{16} \sqrt{13}$ ; also ist  $CH = \frac{\sqrt{13}}{16}$ . Der Einheitskreis um  $D$  durch  $C$  schneidet die weiter verlängerte  $AH$  so in  $E$ , daß  $HE = CH = \frac{\sqrt{13}}{16}$ ; also ist  $AE = \frac{5\sqrt{13}}{8}$ .

Aus unserer Konstruktion folgt  $\sphericalangle EAB = \sphericalangle BCA = \varphi$ ; also  $\sphericalangle CBD = \sphericalangle CDB = 2\varphi$ ,  $\sphericalangle ECD = \sphericalangle CED = 3\varphi$ . Ist nun  $\varphi = \frac{180^\circ}{7}$ , dann ist auch  $\sphericalangle ADE = 3\varphi$ , also  $AD = AE$ . In unserm Fall ist jedoch  $AD = \frac{9}{4} < \frac{5}{8} \sqrt{13} = AE$ ; denn  $\sqrt{324} = 18 < 5\sqrt{13} = \sqrt{325}$ . Folglich ist der Näherungswinkel etwas zu klein. Tatsächlich ergibt sich<sup>9</sup>  $\varphi = 25^\circ 39\frac{1}{2}' < 25^\circ 42\frac{6}{7}' = 180^\circ : 7$ .

3. Die erste quasialementare Konstruktion für das regelmäßige Siebeneck stammt von Fr. Viète. Sie bildet den letzten Abschnitt des berühmten *Supplementum geometriae*<sup>10</sup>, worin Viète den Bereich der Konstruktionsmittel durch Hinzunahme von Einschiebungen erweitert, sodaß er alle reellen Lösungen von Problemen 3. und 4. Grades konstruieren und auf die Einschiebung von zwei geometrischen Mitteln und die Dreiteilung des Winkels zurückführen kann<sup>11</sup>.

Vorausgeschickt wird die Herleitung der Winkeldreiteilungsgleichung<sup>12</sup>, die wir sogleich aus Abb. 3 (ähnlich aufgebaut wie Abb. 2) entnehmen können<sup>13</sup>. Aus  $\triangle ABC \cong \triangle CDP \sim \triangle ACP \sim \triangle ADQ$  folgt

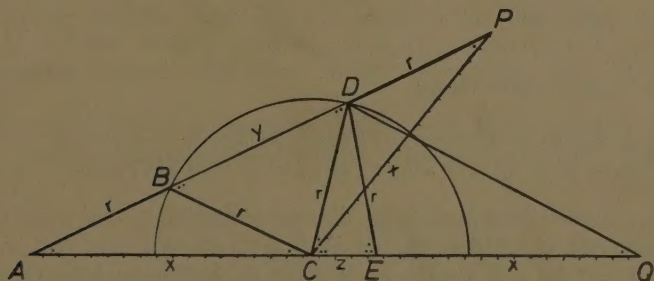


Abb. 3. Zur Dreiteilungsgleichung des Winkels und Siebenecksgleichung.

$$(3,1) \quad \frac{x}{r} = \frac{2r + y}{x} = \frac{x + z}{y},$$

also

$$(3,2) \quad \begin{cases} ry = x^2 - 2r^2 \\ xy = rx + rz \end{cases}$$

und nach Entfernen von  $y$

$$(3,3) \quad x^3 - 3r^2x = r^2z.$$

Im besondern Fall des Siebenecks ist überdies

$$(3,4) \quad x + z = r + y;$$

man kann also z. B.  $y$  und dann  $z$  durch  $x$  ausdrücken und erhält ähnlich wie in (1,3)

$$(3,5) \quad x^3 - rx^2 - 2r^2x + r^3 = 0.$$

In den *Varia responsa*<sup>9</sup> benutzt Viète eine Variante dieser Überlegung; im *Supplementum geometriae*<sup>10</sup> geht er etwas anders vor. Das dortige Verfahren kommt darauf hinaus, daß  $y$  durch  $r + t$  ersetzt und dann die Bedingungsgleichung für  $t$  ermittelt wird. Dieser Ansatz ist durch unmittelbare Weiterbildung der Überlegungen Cardanos entstanden.

4. Der in den *Varia responsa* verwendete Gedanke zur Herleitung der Siebenecksgleichung ist zwar zweckmäßig, jedoch noch nicht in der bestmöglichen Form durchgeführt. Sehen wir uns zunächst Abb. 3 nochmals

an! Offenkundig ist (mit  $\varphi = \frac{180^\circ}{7}$ )

$$(4,1) \quad x = 2r \cdot \cos \varphi, \quad y = 2r \cdot \cos 2\varphi, \quad z = 2r \cdot \cos 3\varphi,$$

oder in etwas anderer Form:

$$(4,2) \quad \begin{cases} x_1 = x = 2r \cdot \cos \varphi, x_2 = z = 2r \cdot \cos 3\varphi, x_3 = -y = 2r \cdot \cos 3^2\varphi, \\ x_4 = x_1 = 2r \cdot \cos 3^3\varphi, x_5 = x_2 = 2r \cdot \cos 3^4\varphi, \text{ usw.} \end{cases}$$

Ist  $f(x_1, x_2) = 0$  eine Beziehung, die nur zwischen  $x_1$  und  $x_2$  ohne Beteiligung von  $x_3$  statthat, so ist auch  $f(x_2, x_3) = 0$  und  $f(x_3, x_1) = 0$  erfüllt. Nun folgt z. B. aus der Ähnlichkeit der gleichschenkligen Dreiecke *CDE* und *ADE*

$$(4,3) \quad \frac{z}{r} = \frac{r}{r+y},$$

also

$$(4,4) \quad \begin{cases} x_2 x_3 = r x_2 - r^2 \\ x_3 x_1 = r x_3 - r^2 \\ x_1 x_2 = r x_1 - r^2 \end{cases}$$

und somit

$$(4,5) \quad x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 = r(x_1 + x_2 + x_3) - 3r^2.$$

Werden die Gleichungen (4,4) der Reihe nach bez. mit  $x_1$ ,  $x_2$  und  $x_3$  multipliziert und dann addiert, so ergibt sich mit Berücksichtigung von (4,5)

$$(4,6) \quad 3x_1 x_2 x_3 = r(x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1) - r^2(x_1 + x_2 + x_3) = -3r^3.$$

Schließlich folgt unter Rückgriff auf (3,4)

$$(4,7) \quad x_1 + x_2 + x_3 = r.$$

Somit sind  $x_1 = x$ ,  $x_2 = -y$ ,  $x_3 = z$  die drei Lösungen der kubischen Gleichung

$$(4,8) \quad (t-x)(t+y)(t-z) \equiv t^3 - r t^2 - 2r^2 t + r^3 = 0.$$

Auf diesem Wege scheinen mir die symmetrischen Eigenschaften der Strecken  $x$ ,  $y$  und  $z$  besonders deutlich herauszukommen. Natürlich kann das angedeutete Verfahren auch ganz einfach im Sinne der Gauss'schen Theorie der Kreisteilungsgleichungen<sup>14</sup> interpretiert werden.

5. Viètes Hauptergebnis besteht in dem Nachweis, daß sich die Gleichung (4,8) durch Beseitigen des quadratischen Gliedes auf die Dreiteilungsgleichung eines Winkels zurückführen läßt. Dies geschieht

zweckmäßig dadurch, daß man  $t$  durch  $\frac{r+t}{3}$  ersetzt. Die Gleichungs-

umrechnung läßt sich vermeiden, wenn man die wesentlichen Stücke der Abb. 3 so bezeichnet, wie dies in Abb. 4 geschehen ist. Jetzt geht (4,3) über in

$$(5,1) \quad \frac{z+r}{3r} = \frac{3r}{2r+y},$$

also folgt mit  $x = x_1$ ,  $-y = x_3$  und  $z = x_2$

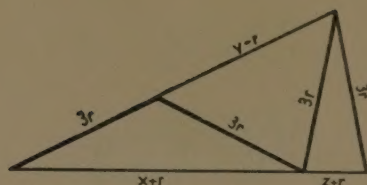


Abb. 4. Verkürzte Herleitung der Siebenecksgleichung.

$$(5,2) \quad x_2 x_3 = 2r x_2 - r x_3 - 7r^2$$

usw. und hieraus

$$(5,3) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 = r(x_1 + x_2 + x_3) - 21r^2 \\ 3x_1 x_2 x_3 = r \Sigma x_1 x_2 - 7r^2 \Sigma x_1 = -21r^3 - 6r^2 \Sigma x_1 \end{array} \right\}$$

Nun ist aber

$$(5,4) \quad x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

Folglich heißt die umgeformte Gleichung

$$(5,5) \quad (t-x)(t+y)(t-z) \equiv t^3 - 21r^2 t + 7r^3 = 0.$$

Die praktische Konstruktion schließt sich am zweckmäßigsten an an die absolut größte Lösung —  $y$ . Wir finden sie durch Übergang zur Gleichung

$$(5,6) \quad y^3 - 3y \cdot 7r^2 = r \cdot 7r^2.$$

Jetzt machen wir (Abb. 5) auf einer Geraden  $OC = CE = ES = r$ ; dann

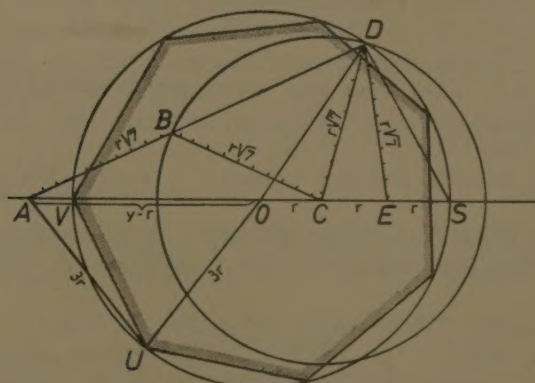


Abb. 5. Konstruktion des regelmäßigen Siebenecks nach Viète.

zeichnen wir das gleichseitige Dreieck  $OSD$  über  $OS$ . Jetzt ist  $CD = r\sqrt{7}$ . Dann schieben wir durch  $D$  zwischen die verlängerte  $CO$  und den Kreis um  $C$  durch  $D$  die Strecke  $AB = CD$  ein. Jetzt ist  $AC = y$ ; also  $AO = y - r$ . Machen wir also  $AUO$  zu einem gleichschenkligen Dreieck unter  $AO$  mit den Schenkeln  $3r$ , dann ist  $OUV$  eines der kennzeichnenden gleichschenkligen Dreiecke des regelmäßigen Siebenecks im Kreis des Halbmessers  $3r$ . Viètes Originalkonstruktion beruht auf dem nämlichen Grundgedanken<sup>15</sup>. Ich halte sie für eine der schönsten Einzelleistungen Viètes und möchte sie, da sie den heutigen Mathematikern entschwunden zu sein scheint, wieder in Erinnerung bringen.

## ANMERKUNGEN

1. Vgl. J. E. Hofmann, *Ein Beitrag zur Einschiebungslehre*, Zeitschr. f. math.-naturw. Unterr. 57, 1926, S. 433/42, insbes. S. 434/35.
2. Euklid II, 11: Konstruktion von  $x$  aus  $x^2 = a(a-x)$  nach dem Pythagoreischen Lehrsatz vermöge  $(x + \frac{a}{x})^2 = a^2 + (\frac{a}{x})^2$ ; IV, 10/11: regelmäßiges Fünfecks aus einem Dreieck, dessen Winkel sich wie  $1 : 2 : 2$  verhalten und das auf den goldenen Schnitt zurückführt; VI, 30: Herleitung der Ausgangsgleichung aus der Verhältnisform  $a : x = x : (a-x)$ .
3. Vgl. C. Schoy, *Die trigonometrischen Lehren ... des Al-Bīrūnī*, ed. J. Ruska/H. Wieleitner, Hannover 1927, S. 74/84 (Wiedergabe der Archimedischen Siebenecksabhandlung nach der Redaktion des Tābit Ibn Qurra) und S. 85/91 (Wiedergabe einer Studie des Ibn Al-Haitām über die Archimedische Abhandlung). Siehe ferner J. Tropfke, *Archimedes und die Trigonometrie*, Archiv f. Gesch. d. Math., d. Naturw. u. d. Techn. 10, Leipzig 1928, S. 432/61, insbes. S. 451/55; ders. *Zur Geschichte der Mathematik*, Zeitschr. f. math.-naturw. Unterr. 59, 1928, S. 193/98; ders. *Die Siebeneckabhandlung des Archimedes*, Osiris 1, Brügge 1936, S. 136/51.
4. *De subtilitate*, Nürnberg 1550 u. öfter, Buch XVI, stark erweitert in der Ausgabe Basel 1554, etwas anders gewendet im *Opus novum*, Basel 1570, prop. 66, S. 55 ff.
5. Vgl. etwa J. Tropfke, *Geschichte der Elementarmathematik* III<sup>3</sup>, Berlin/Leipzig 1937, S. 132.
6. *Summa de Arithmetica Geometria Proportioni et Proportionalita*, Venedig 1494. Da ich dieses Werk nicht einsehen konnte, folge ich einer Angabe Cardanos von 1570.
7. *Opera* III, griech.-dtsh. ed. H. Schöne, Leipzig 1903; I, Hilfssatz vor prop. 20, S. 54.
8. Vgl. etwa Th. Peters, *Über Näherungskonstruktionen und Mechanismen im ersten Buch der Harmonik Keplers und seine Forderung nach Beschränkung der Konstruktionsmittel allein auf Zirkel und Lineal*, Deutsche Mathematik 6, Leipzig 1941, S. 110/32, insbes. S. 121/23.
9. Die Tafelrechnung wird z. B. ausgeführt bei Fr. Viète, *Variorum de rebus mathematicis responsorum liber VIII*, Tours 1593, Kap. VII, probl. 1 = *Opera*, ed. Fr. van Schooten, Leiden 1646, S. 359/60, jedoch nur verkürzt:  $\varphi = 25\frac{1}{2}^\circ < 25\frac{1}{2}^\circ$ .
10. Tours 1593, prop. 19/25 = *Opera*<sup>3</sup>, S. 251/56.

11. So wird es in allgemeinen Worten auseinandergesetzt in der Schlußprop. 26 = *Opera*<sup>9</sup>, S. 256/57.
12. ebda prop. 8/18 = *Opera*<sup>9</sup>, S. 245/51.
13. Ich folge von hier ab nicht mehr den weitschweifigen Einzelausführungen Viètes, sondern gebe nur mehr die Leitgedanken kurz wieder. In Abb. 3 habe ich *P* und *Q* hinzugefügt. Der allgemeine Gedanke hängt zusammen mit den Andeutungen in den *Theoremata ad angulares sectiones*, ed. A. Anderson, Paris 1615, *theor.* 6 = *Opera*<sup>9</sup>, S. 291. Ob diese im Sinn Viètes selbst hinzugefügt worden sind, wissen wir nicht.
14. *Disquisitiones arithmeticae*, Leipzig 1801, *Sectio* 7 = *Werke* I, Göttingen 1876, S. 412 ff.
15. Bestimmen wir auf dem Kreis um *C* die weiteren Punkte *B*<sub>1</sub> und *B*<sub>3</sub>, welche *B* zu einem gleichseitigen Dreieck ergänzen, dann liegen auf den Geraden *DB*<sub>1</sub> und *DB*<sub>3</sub> zwischen dem Kreis und der verlängerten *AO* wiederum Strecken der Länge  $r\sqrt{7}$ . Die zugehörigen Punkte *A*<sub>1</sub> und *A*<sub>3</sub> befinden sich rechts von *C*; bei richtiger Zuordnung ist  $CA_1 = x$ ,  $CA_3 = z$ , also  $OA_1 = x + r$ ,  $OA_3 = z + r$ . Nur aus Gründen der Übersichtlichkeit sind die fraglichen Ergänzungslinien nicht in Abb. 5 eingetragen.

HENRI BERR (1863-1954)  
LA SYNTHÈSE DE L'HISTOIRE ET L'HISTOIRE  
LA SCIENCE

par

George Sarton\*

La plupart des savants qui se sont consacrés à l'étude de l'histoire des sciences ont reçu une éducation scientifique. Cela est évidemment vrai de ceux qui ont écrit l'histoire d'une science déterminée, telle que les mathématiques, l'astronomie ou la chimie, mais c'est vrai aussi de ceux qui se sont occupés de l'histoire de la science en général, par exemple, Tannery, Duhem, Dampier ou Siegmund Günther. La seule grande exception est celle des éditeurs de textes grecs, arabes, sanscrits, chinois, etc., qui devaient être avant tout des philologues.

Cependant le domaine de nos études est immense et on peut l'approcher avantageusement de plusieurs directions. Henri Berr fut avant tout un historien, et secondairement un philosophe. Sa préoccupation principale dès les années de l'Ecole Normale fut de comprendre la raison d'être et le progrès de l'humanité; cela le conduisit nécessairement à la synthèse de l'histoire. Bien avant d'avoir atteint la quarantaine il avait déjà compris, malgré son défaut d'éducation scientifique, que le progrès de l'humanité était basé dans une large mesure sur le progrès des sciences et des techniques. Pour comprendre l'histoire il fallait donc connaître la science, et de même que la compréhension de l'humanité impliquait la synthèse de l'histoire elle impliquait aussi l'histoire de la science. Il fut donc amené de l'histoire et de la philosophie à la synthèse de l'histoire, puis à la synthèse de la science et enfin à l'histoire de la science. Il existe entre l'histoire et la science une telle polarité que l'on ne peut bien comprendre l'une sans comprendre l'autre. Cela paraît tout simple aux vrais historiens de la

\* 5 Channing Place, Cambridge 38, Mass., U.S.A.

science, mais peu d'hommes de science ont compris cette vérité, et les historiens qui l'ont vraiment atteinte sont extrêmement rares.

Il ne fut jamais un historien de la science professionnel, mais cependant peu d'hommes ont fait autant que lui pour le progrès de nos études et leur diffusion.<sup>1</sup>

Henri Berr est né le 31 janvier 1863 à Lunéville (Meurthe-et-Moselle, en Lorraine); son père était Vosgien et sa mère Strasbourgeoise. C'était donc tout à fait un Français du Nord-Est, un voisin des Allemands, et on le reconnaissait facilement comme tel. Il reçut son éducation au Lycée Charlemagne à Paris, puis à l'Ecole Normale (1881-84); au sortir de celle-ci il fut professeur de rhétorique à Douai, puis à Tours, obtint son doctorat ès lettres en 1899, et il enseigna l'histoire pendant trente ans (1896-1925) au Lycée Henri IV à Paris.

En 1925, il donna sa démission (un peu avant l'âge habituel) pour pouvoir se consacrer entièrement à ses entreprises littéraires qui seront décrites plus bas. Nous les décrirons dans l'ordre chronologique des débuts de chacune, mais le lecteur doit se souvenir qu'il se consacra à chacune d'elle depuis chaque début jusqu'à la fin de sa longue vie.

#### 1900: *Revue de Synthèse Historique*

Cette revue fondée par Henri Berr à l'âge de 37 ans n'était pas seulement une revue générale d'histoire comparable à beaucoup d'autres. Le titre «synthèse historique» était une devise qui était plus hardie qu'on ne le pense. Le mot synthèse effarouche beaucoup d'érudits et la devise que le jeune historien avait adoptée n'était pas de celles qui mènent à l'Académie des Inscriptions. Les bons académiciens savent que les connaissances fondamentales s'obtiennent par l'analyse de documents ou de monuments inédits et ils ont tendance à croire que la synthèse n'est qu'une forme de dilettantisme, plus proche de la littérature que de la bonne érudition. Ils n'ont pas tout à fait tort mais ils exagèrent.

L'analyse et la synthèse constituent un rythme essentiel de la pensée; il faut passer sans cesse de l'une à l'autre, sinon l'on se perdrait dans un labyrinthe et les efforts intellectuels deviendraient incompréhensibles ou inutiles.

Une bonne synthèse implique deux choses, une saine érudition et un nouveau point de vue. Il ne sert à rien de mettre les choses ensemble sans

une pensée générale qui permet de les mettre en ordre, et la synthèse n'est utile et nécessaire que si cette pensée est suffisamment nouvelle et féconde.

Dès les premiers volumes on se rendit compte que la *Revue de Synthèse historique* était vraiment une création fertile. Des articles comme ceux de Paul Tannery, André Lalande, Lucien Poincaré, Abel Rey, Maurice Caullery, Lucien Febvre et autres ne s'étaient jamais trouvés ensemble dans le même recueil. Chacun de ces articles donnait une signification nouvelle à tous les autres. La salle de rédaction fut d'abord établie dans un petit bureau de la rue Sainte Anne;<sup>2</sup> Henri Berr y recevait ses amis et collaborateurs le jeudi et ces entretiens du jeudi servirent à mieux déterminer l'orientation nouvelle.

Le volume 8 publia la «leçon inaugurale» que Paul Tannery aurait faite s'il avait élu professeur au Collège de France. J'ai raconté ailleurs cette triste histoire (*Isis* 38, 31-51, 1947). Cette leçon fut le programme de la nouvelle discipline.

#### 1911: *La Synthèse en Histoire*

Je n'ai pas l'intention de parler des premiers livres d'Henri Berr, mais il vaut la peine d'en citer les titres car ceux-ci sont significatifs. *Vie et Science. Lettres d'un vieux philosophe strasbourgeois et d'un étudiant parisien* (232 p., Paris 1894). *L'avenir de la philosophie. Esquisse d'une synthèse des connaissances fondée sur l'histoire* (512 p., Paris, Hachette, 1899). *Peut-on refaire l'unité morale de la France?* (147 p., Paris, Colin, 1901). Toutes ses préoccupations ultérieures y sont déjà dessinées.

Après une douzaine d'années de travail avec ses amis de la *Revue de Synthèse Historique* et de polémiques avec d'autres historiens, français et étrangers, Henri Berr jugea que le temps était venu de faire le point et d'expliquer plus méthodiquement le but et les méthodes de ses efforts. Il le fit dans le livre intitulé *La synthèse en histoire. Essai critique et théorique* (288 p., Paris, Alcan, 1911).

L'ouvrage est construit comme suit. Introduction. Erudition, philosophie de l'histoire et synthèse. I. Les deux degrés de la synthèse: synthèse érudite et synthèse scientifique. II. Les articulations de la synthèse scientifique. Conclusion. L'avenir de l'histoire: intuition et synthèse.

#### 1920: *L'évolution de l'humanité*

Ceci fut la plus grande entreprise de Berr, mais je n'en parlerai pas aussi bien qu'elle ne le mérite, parce que cela causerait une digression

interminable. Avec l'aide de l'éditeur, Albin Michel, il commença la publication d'une longue série de manuels dont chacun devait expliquer aussi complètement que possible mais sans excès d'érudition, un moment ou un aspect important du passé. La collection est divisée en cinq sections.

- I. Introduction. Préhistoire, protohistoire, antiquité.
- II. Origines du Christianisme. Moyen Âge.
- III. Le monde moderne (du XVI<sup>e</sup> au XVIII<sup>e</sup> siècle).
- IV. Vers le temps présent (XIX<sup>e</sup> et XX<sup>e</sup> siècles).
- V. Série complémentaire, dans laquelle s'alignent les 5 vols. d'Abel Rey sur la *Science dans l'Antiquité*, et trois ouvrages explicatifs d'Henri Berr.

La collection devait comprendre plus de cent volumes, dont soixante six ont paru et dont les autres sont en préparation; quelques uns de ces volumes ont été traduits en plusieurs langues. Tous ces volumes, si je ne me trompe, en tous cas beaucoup d'entre eux, contiennent un avant propos que Henri Berr avait ajouté pour assurer l'unité de la collection.

#### 1925: *Centre International de Synthèse. Fondation pour la Science*

La nouvelle initiative qu'il prit en 1925 fut plus ambitieuse. Il y fut encouragé par son vieil ami, Paul Doumer.<sup>3</sup> Ce fut le Centre international de Synthèse qui fut d'abord établi au Palais Royal, dans les bureaux de l'Institut international de coopération intellectuelle, mais qui fut transporté en 1929 à l'Hôtel de Nevers, rue Colbert, l'ancienne demeure de la Marquise de Lambert (1647-1733).<sup>4</sup> L'Hôtel de Nevers est tout près de la Bibliothèque Nationale. Dans la seconde moitié du XVIII<sup>e</sup> siècle le Cabinet des Médailles y était installé et son directeur l'abbé Jean-Jacques Barthélemy (1716-95), y avait un petit bureau qui fut tard celui-même de Henri Berr. C'est pour cette raison que ce bureau est orné du plâtre original du buste de l'abbé par Houdon.<sup>4bis</sup>

Le Centre fut divisé en quatre sections, Synthèse historique, Synthèse générale, Sciences de la Nature, Histoire des Sciences.

Cette dernière qui nous intéresse particulièrement, fut vivifiée par la collaboration enthousiaste et dévouée d'Aldo Mieli (1879-1950), Hélène Metzger (1889-1944), et de Pierre Sergescu (1893-1954).

En 1929, l'Académie internationale d'histoire des sciences fut fondée par Mieli et il fut tout naturel d'établir son siège social à l'Hôtel de Nevers. Le premier étage était occupé par l'Académie qui le partagea plus tard

avec l'Union internationale,<sup>5</sup> le deuxième étage était réservé au Centre et à la Fondation pour la Science.

Henri Berr fut nommé membre d'honneur de l'Académie le 30 juin 1931.

J'ai été associé avec ces trois institutions autant qu'on peut l'être sans habiter Paris car j'ai fait partie de l'Académie et de l'Union depuis leurs débuts, et suis devenu un membre du conseil d'administration de la Fondation pour la Science le 12 avril 1948. Je dis cela simplement pour montrer que je parle de choses qui me sont très familières et qui font appel non seulement à mon imagination mais aussi à mon cœur.

### 1929: *Semaines de Synthèse*

L'activité la mieux connue du Centre fut l'organisation de Semaines de Synthèse, une série de conférences annuelles<sup>6</sup> qui servaient à la discussion des problèmes les plus importants de la science et de la vie. Il serait trop long de les énumérer en détail et je dois me contenter de citer le titre principal de chacune d'elles.

1. 1929. L'évolution en biologie  
Civilisation, le mot et l'idée
2. 1930. Les origines de la société  
La relativité
3. 1931. L'individualité
4. 1932. L'évolution de la physique et de la philosophie.  
La foule
5. 1933. Science et loi
6. 1934. La notion de progrès devant la science actuelle
7. 1935. La statistique
8. 1936. Le ciel dans l'histoire et la science
9. 1937. L'invention
10. 1938. La sensibilité dans l'homme et la nature
11. 1939. Qu'est-ce que la matière?
12. 1946. L'énergie dans la nature et dans la vie
13. 1947. Valeur philosophique de la psychologie
14. 1948. Naissance de la terre et de la vie sur la terre
15. 1949. La synthèse, idée-force
16. 1950. La mentalité préhistorique
17. 1951. L'invention humaine. Technique, morale, science
18. 1952. L'infini et le réel
19. 1954. L'unité de l'être.

On voit que ces conférences et ces discussions organisées par des historiens étaient bien souvent consacrées à des questions scientifiques. Et comment aurait-il pu en être autrement ? Les grands problèmes de la vie, ceux qui tiraillent notre esprit et bouleversent notre conscience, ne sont-ils pas suscités le plus souvent par le progrès de la science ?

Parmi les savants invités à prendre une part active aux discussions il y avait des historiens, des philosophes, des hommes de science et souvent aussi des historiens de la science. La présence de ces derniers était indispensable parce que lorsqu'on veut vraiment comprendre un concept scientifique, tels que ceux d'évolution, relativité, matière, énergie, il faut bien que l'on explique leur émergence et leur histoire. Et de même si l'on veut mesurer le retentissement d'une idée scientifique et son influence sociale il faut qu'on raconte ses vicissitudes.

En somme tout conspirait à diriger Henri Berr vers nos études ; ce n'était pas seulement une question de goût mais de nécessité. C'est d'ailleurs ce que je me suis fatigué à répéter depuis 1912. L'homme de science, l'historien, le philosophe, l'éducateur, le sociologue, s'ils ont assez d'imagination et de courage pour sortir de leurs ornières respectives sont obligés de se rencontrer à ce carrefour des pensées profondes : l'histoire de la science, l'histoire la plus sublime de l'humanité.

Avant de terminer cette section de ma biographie je dois rappeler brièvement une autre initiative d'Henri Berr, la seule qui fut interrompue après quelques années et jamais reprise. Il fonda en 1936 un journal apériodique intitulé *Science. Encyclopédie annuelle*. Ce journal a paru d'octobre 1936 à mai 1939, et sa publication fut arrêtée par la guerre. Je pense que sans la guerre elle eut été interrompue tôt ou tard, parce que cette entreprise était vraiment trop ambitieuse. Aucun homme de science n'aurait osé faire cela ; il fallait pour le tenter l'enthousiasme d'un historien qui avait compris le rôle fondamental de la science, avait appris à l'aimer, mais était trop ignorant pour en mesurer l'immensité. Sans doute avait-il beaucoup appris au cours de sa longue existence, mais rien ne peut remplacer l'éducation scientifique qu'un jeune homme reçoit au début de sa carrière. Cette *encyclopédie annuelle* n'aurait pu satisfaire longtemps ni les savants, ni les demi-savants, ni personne.

#### 1947: *Revue d'Histoire des Sciences*

Il est probable que parmi toutes les circonstances qui poussèrent notre vieil ami dans la direction du grand carrefour – l'histoire de la science – une des plus importantes, sinon la plus importante, fut la présence d'Aldo

Mieli, que la fascisme avait obligé à quitter l'Italie. Il est certain qu'il fit son possible pour aider le grand exilé, et sans doute l'aida-t-il à publier sa revue, *Archivio di Storia delle Scienze* dont Mieli avait commencé la publication à Rome en 1919, qui fut rebaptisée *Archeion* en 1927, et devint les *Archives internationales d'Histoire des Sciences* en 1947. On aurait pu croire que la publication de ces *Archives* lui suffirait, mais il voulut avoir sa revue à lui, au Centre de synthèse et fonda en 1947 la *Revue d'Histoire des Sciences*.

Depuis 1947, il a donc existé à Paris deux grandes revues d'histoire des sciences, les *Archives* dirigées au premier étage de l'Hôtel de Nevers et la *Revue* éditée au deuxième. Henri Berr fut le fondateur-directeur de la *Revue* et il eut le bonheur de pouvoir s'associer Pierre Brunet (1893-1950), et après la mort inopinée de celui-ci, Suzanne Delorme et René Taton.

Henri Berr aimait beaucoup à rattacher ses créations les unes aux autres et à souligner l'unité de ses efforts. Dans la préface du vol. 1 (1947) il déclara donc que la *Revue d'histoire des sciences et de leurs applications* était en quelque sorte une continuation de la *Revue de synthèse historique* qui publia beaucoup d'articles sur l'histoire des sciences. C'était une sorte d'essaimage. On ne voit pas bien toutefois pourquoi la *Revue* devait dupliquer les efforts des *Archives*, et cela dans la même maison. Il se peut que ces deux revues auraient plus de force unies que séparées, mais je ne connais pas assez bien toutes les circonstances pour émettre un jugement. L'union est bonne mais l'émulation est peut-être plus utile.

#### 1950: *Quatre anniversaires*

Depuis 1931 la *Revue de Synthèse historique* fut appelée *Revue de Synthèse*, parce qu'elle ne s'occupait plus seulement de synthèse historique mais tout autant de synthèse scientifique. Cette différence essentielle avait été accentuée par les Semaines dont beaucoup avaient été nécessairement consacrées à la discussion de problèmes scientifiques. En 1950, la *Revue de Synthèse*<sup>7</sup> put célébrer un quadruple anniversaire, le cinquantenaire de la fondation de la *Revue de Synthèse historique*, le vingtcinquième anniversaire du Centre international, le vingtième anniversaire de la *Revue de Synthèse* et la Quinzième Semaine.

Ce fut l'occasion de revoir l'œuvre accomplie pendant la première moitié du siècle et de préparer de nouveaux desseins pour l'avenir.

Les discussions de la Quinzième Semaine roulèrent sur «la Synthèse, idée force dans l'évolution de la pensée». Après une introduction de Berr,

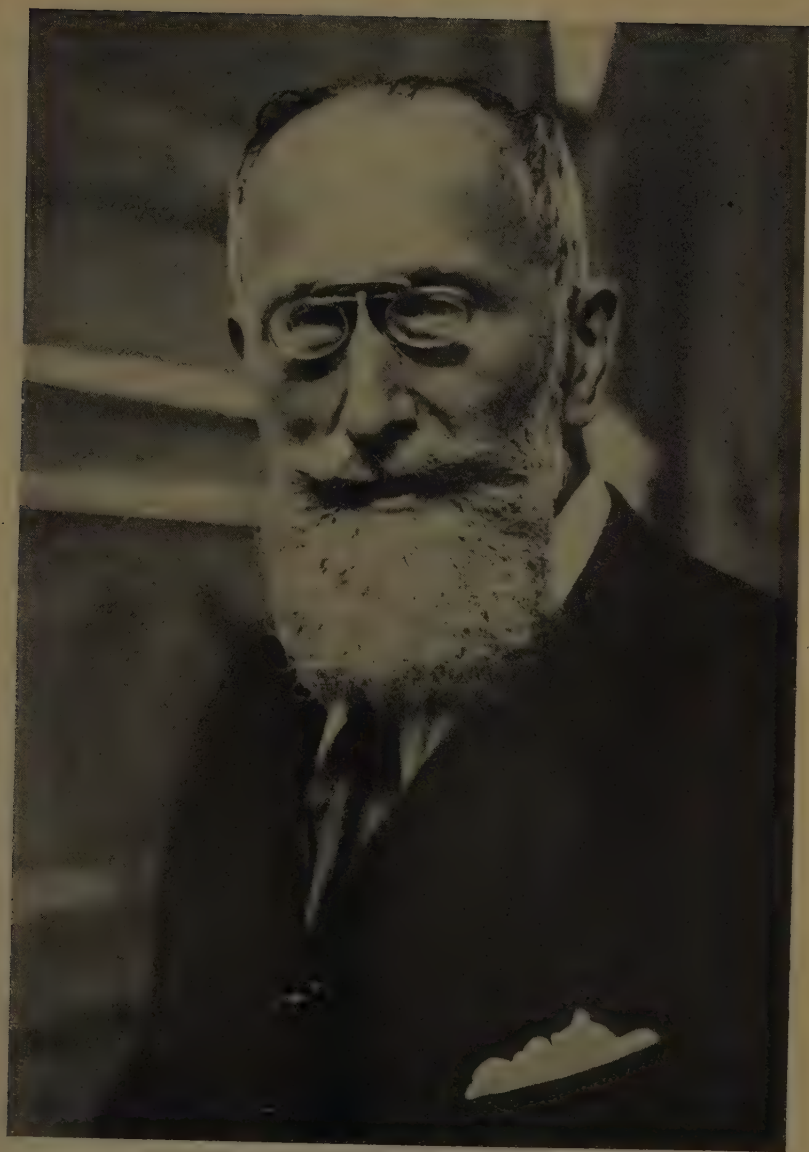
opposant la synthèse, qui reste libre et créatrice, au système qui est figé et dogmatique, les conférences suivantes constituèrent une histoire de la pensée scientifique jusqu'à la fin du siècle passé. Emile Bréhier parla de l'apport scientifique de l'antiquité, Alexandre Koyré de celui de la Renaissance, Pierre Maxime Schuhl de Bacon, Bernard Rochot de Gassendi, Armand Cuvillier de Descartes, Paul Vernière de Diderot et d'Alembert, Pierre Ducassé de Comte et Spencer, Julien Benda de la synthèse matérialiste. La dernière conférence fut donnée par Berr lui-même, une sorte de conclusion magistrale sur la synthèse des connaissances et l'histoire. Ce qui fait le grand intérêt de cette Semaine (et de toutes les autres) c'est que chaque conférence était suivie d'un échange de vue très nourri et bien nuancé entre gens compétents.

Comme l'a dit Emile Bréhier, «C'est cette conception généreuse de la philosophie de la science qui anima l'œuvre très caractéristique de la *Synthèse* d'Henri Berr : dans des réunions où se rencontrent mathématiciens, physiciens, biologistes, sociologues et philosophes, et où l'histoire des idées ne joue pas un moindre rôle que la mise en valeur des résultats des sciences, se dégagent les problèmes nouveaux que le progrès des sciences pose à l'esprit humain.»<sup>8</sup>

Pour en revenir à la Quinzième Semaine, le résultat le plus clair pour moi en fut d'accentuer ce fait notoire que la science influe et modifie la philosophie de son temps mais que le contraire n'est pas vrai. Cela me rappelle une remarque faite par Adolf von Harnack (1851-1930) dans un de ses cours à l'Université de Berlin «On se plaint, tout à fait à tort, de ce que notre génération n'a pas de philosophes; le fait est que les philosophes d'aujourd'hui ont simplement changé de section, leurs noms sont Planck et Einstein. » Cette remarque est particulièrement saisissante dans la bouche d'un théologien.<sup>9</sup>

### 1953: *Journées Gassendistes*

La dernière Semaine dont les débats s'écoulèrent dans la présence d'Henri Berr fut une semaine hors-série qui fut baptisée «Journées Gassendistes». Sauf le nouveau titre, c'était une semaine comme les autres, organisée exactement de la même manière. Pour Henri Berr c'était la conclusion d'un beau cycle car la thèse latine qu'il avait défendue à l'âge de trente cinq ans était consacrée à Gassendi<sup>10</sup> et voilà que cinquante cinq ans plus tard il avait l'occasion d'écouter une série d'autres thèses sur le même homme et de renouveler ses propres souvenirs. Une telle expéri-



Henri Berr (1863-1954)



ence n'est pas donnée à tout le monde, car il faut vivre très vieux pour en profiter. Henri Berr avait alors quatre vingt dix ans et son esprit était aussi clair et prime-sautier que jamais.

Les Journées gassendistes ont été publiées après sa mort par le Centre international de synthèse, sous le titre *Pierre Gassendi. Sa vie et son œuvre, 1592–1655* (266 p., 4 pl., Paris, Albin Michel, 1955). Ce n'est que par l'intermédiaire de ce beau petit volume que je les connais. Elles furent éditées avec beaucoup de soin et la lecture m'en a fait grand plaisir. Bernard Rochot décrivit la vie, le caractère et la formation intellectuelle de Gassendi, et dans une autre conférence discuta sa philosophie; Alexandre Koyré critiqua le savant. L'influence de Gassendi fut expliquée dans les deux dernières journées, l'influence immédiate par Georges Mongrédien et l'influence posthume par Antoine Adam.

Soit dit en passant ce livre et mon article serviront à célébrer le troisième centenaire de Pierre Gassendi.<sup>10bis</sup> Celui-ci qui était né en 1592, l'année de la mort de Montaigne, mourut lui même à Paris le 24 octobre 1655.

Nous nous intéressons profondément à lui, pas autant à cause de ses actes personnels (fort inférieurs à ceux de savants contemporains tels que Galilée, Kepler, Harvey, Torricelli, Hevelius), mais à cause de sa rivalité avec Descartes. Ces deux hommes qui ont dominé le XVII<sup>e</sup> siècle, étaient aussi différents que possible. Descartes était avant tout un mathématicien, son esprit était abstrait, doctrinaire, insociable; sa physique, pléniste; il n'aimait pas l'histoire, il était anti-Galiléen et tout prêt à dire non à beaucoup de choses. Gassendi était au contraire très avenant, son esprit était concret, sceptique, probabiliste, tolérant, relativiste; sa physique atomiste; il était anti-Aristotélien ou plutôt anti-scholastique, mais d'autre part il était Copernicien, Galiléen, appréciait l'œuvre de Gilbert et (mieux que Descartes) celle de Harvey. Son scepticisme était modéré – celui de tout homme de science; il continuait la tradition non seulement de Sextos Empeiricos, mais aussi celle d'Erasme et de Montaigne. Il était historien, même historien de la science, et nous a dit que l'histoire était vraiment la lumière de la vie; on ne pourrait dire mieux en cinq mots. Antoine Adam a si bien compris l'importance de cet aspect du Gassendisme et cela nous touche de si près que je demande la permission de le citer textuellement:

«L'histoire intellectuelle du XVII<sup>e</sup> siècle est tout entière dominée par un grand problème de l'ordre le plus général. Il s'agit de savoir si l'effort de l'humanisme doit être poursuivi ou abandonné, si la vérité doit être acquise au prix d'une rupture avec le passé, si elle peut être retrouvée par l'effort solitaire de la raison – si la science est la découverte d'évidences premières et la reconstruction du monde à partir de ces évidences.

«Devant tous ces problèmes qui forment faisceau, le gassendisme a été le contrepoids du cartésianisme. Il a affirmé, de 1660 à 1700, au milieu des conquêtes cartésiennes, la permanence de l'humanisme. Il a maintenu que l'esprit de tradition et l'esprit de recherche devaient se fondre et non s'exclure. Il a cru au caractère collectif de l'effort des intelligences, et souhaité une connaissance concrète de l'univers et de l'homme obtenue par la convergence d'innombrables recherches.»<sup>11</sup>

Descartes fut le grand maître au milieu du siècle (disons, de 1637 à 1675) mais après cela ce fut le tour de Gassendi, car celui-ci influença Boyle et Newton, Bayle, Montesquieu, Fontenelle, Diderot. Il y eut autour de lui un bon cercle d'amis et il lui fut permis d'expliquer ses idées au Collège de France (1645-47). Toutefois ses œuvres complètes (1658)<sup>12</sup> furent un peu trop massives et rébarbatives pour avoir beaucoup de lecteurs, et sa réputation ne commença à grandir dans le monde non-spécialisé que lorsque François Bernier en eut publié un résumé français en 1675.<sup>13</sup> L'honnête homme de la fin du dix-septième siècle était encore capable de lire le latin, mais il préférerait ne le lire qu'à petite dose et l'évitait quand il le pouvait.

Ces discussions sur Gassendi ont été très utiles. Il est nécessaire de penser à lui si l'on veut bien comprendre le dix-septième siècle, le passage de Descartes à Newton, ou celui de Descartes à Leibniz.

### 1955: *Œuvres posthumes*

Vers la fin de sa vie Henri Berr s'était fracturé le col du fémur mais cet accident avait à peine interrompu ses nombreuses activités et pas du tout ses méditations. Quand je l'ai vu les dernières fois dans son bel appartement de la rue Villebois-Mareuil (au XVII<sup>e</sup>, entre l'Avenue des Ternes et l'Avenue Niel) en 1952 et 1953, il paraissait si alerte et si jeune d'esprit que je lui demandai en riant s'il voulait surpasser Fontenelle. Quand il s'est éteint le 19 novembre 1954 il avait presque quatre vingt douze ans.

Trois livres de lui, ou inspirés par lui, ont paru depuis sa mort. J'ai déjà parlé du premier consacré à Gassendi. Le deuxième fut un gros volume de son *Evolution de l'humanité, Le Romantisme dans la musique européenne* (642 p., Albin Michel, Paris 1955), commencé par Jean Chantavoine et terminé par Jean Gaudefroy-Demombynes. Ce livre, le 66<sup>e</sup> de la collection, commence comme les autres par un avant-propos du directeur.

Le troisième, qui est tout à fait sien, est une autobiographie intitulée *La montée de l'esprit. Bilan d'une vie et d'une œuvre* (158 p., Paris, Albin Michel, 1955). Cette autobiographie est essentiellement différente des autobiographies ordinaires, parce qu'il n'y parle pas des événements

matériels de sa vie, sinon quand ils servent de points de repère. Il n'y a guère d'anecdotes; c'est plutôt une confession de foi. Il fut poussé à l'écrire par le livre d'Edouard Le Roy (1870-1954), *Introduction à l'étude du problème religieux* (Paris, Aubier, 1944) et la commença la même année. La première partie fut achevée à Presles en août 1947, la deuxième à Avrainville en août 1953, et il a relu le tout à Presles en août 1954.

Les deux parties représentent les deux pôles de sa vie, la religion et la science. Cela étonnera les lecteurs qui ne connaissent pas l'évolution de sa pensée ou n'en connaissent que la surface, parce que si on leur demandait ce qu'il fut, ils répondraient sans hésiter un historien, ou bien un philosophe. Or il est clair que ses angoisses concernèrent surtout non pas l'histoire et la philosophie, mais la religion et la science. Et il en fut ainsi dès ses débuts mais avec plus de force à mesure que s'écoulait sa vie, et que les polémiques relatives à la Nouvelle Sorbonne (1908-10) et que les désastres politiques, militaires, économiques l'obligeaient à se replier davantage sur lui-même.

«Dès l'Ecole Normale» nous dit-il<sup>14</sup> «j'ai compris en toute clarté, et l'origine et le rôle de la religion, et les fins – plus spirituelles que pratiques – de la science. Je me suis, en quelque sorte, installé, sans regret, avec une lucidité bienfaisante, dans cette foi qui s'était imposée à mon esprit.»

Cette foi religieuse, c'était essentiellement une foi dans la science.

«Tous les bienfaits matériels que l'homme doit à la science n'en constituent point, d'ailleurs, l'aspect qui nous intéresse ici. La science a une toute autre portée, n'hésitons pas à dire: une valeur religieuse. Elle ne nous fait pas seulement connaître l'univers: elle nous unit à lui en nous révélant sa Loi, sa tendance, qui est notre tendance et qui doit l'être de plus en plus consciemment.»

☞ Toute sa vie a été dominée par la recherche d'une synthèse; étant historien de profession, il la chercha d'abord dans l'histoire, mais il s'aperçut que si cela était nécessaire ce n'était pas du tout suffisant. Il fallait en trouver d'autres éléments dans la science et dans la religion,<sup>15</sup> pas seulement dans l'une ou l'autre mais dans les deux. En dernière analyse la science est la conscience de l'humanité.

Henri Berr pensait toujours à l'humanité, et son centre était un Centre *international* de Synthèse, les Semaines étaient des Semaines *internationales*. Il était avant tout un Français très patriote. C'était un homme de la frontière orientale comme son contemporain, Maurice Barrès (1862-1923); il ne partageait pas le chauvinisme fougoux et intolérant de celui-ci, mais il n'en était pas moins un homme de l'Est, qui ne pouvait s'empêcher

de penser tout le temps aux rivalités et aux menaces allemandes. Cela était tout naturel; n'avait-il pas été la victime de trois invasions de plus en plus terribles? Je n'ai pas cité tous ses livres mais seulement ceux qui ont jalonné sa trajectoire principale, mais il faut bien ajouter ici que pas moins de cinq furent consacrés à l'Allemagne;<sup>16</sup> ce sont des livres honnêtes et tolérants, mais tels qu'il fallait être Français pour les écrire. Il était internationaliste dans une certaine mesure, mais son internationalisme était essentiellement français et parisien. Il faut bien dire que le vrai internationalisme ne peut guère se concevoir dans les grandes nations qui projettent autour d'elles une ombre si étendue et si épaisse que les couleurs étrangères y sont fondues et disparaissent. Il semble que les grandes nations ne peuvent accepter l'internationalisme que sous leur propre hégémonie, et en quelque sorte à leurs conditions. Henri Berr était un lecteur insatiable mais je pense qu'il ne lisait bien que le français. Peut-être se disait-il que toutes les œuvres importantes finissent par être traduites en français, et cela est vrai en gros, mais il y a un décalage qui falsifie la vision totale de chaque moment. Ce n'est peut-être que dans les petits pays où tous les penseurs sont polyglottes et cosmopolites de nécessité que l'internationalisme, ou pour mieux dire, le supernationalisme, sont assez naturels. Il faut qu'un livre soit écrit en français pour vraiment influencer les Français; d'autre part un Danois bien élevé n'attendra pas qu'un livre soit traduit en danois pour le lire. C'est là peut-être toute la différence, mais elle est sensible.

Henri Berr ne fut pas plus que Gassendi un inventeur, mais il fut un animateur de grand style, qui a donné à la France et à l'humanité entière des leçons inoubliables. Il écrivait très facilement, comme il parlait, et j'éprouve d'autant plus de plaisir à le lire que ne puis m'empêcher d'entendre le rythme de sa voix bien modulée et même de voir son sourire et ses yeux. C'est comme s'il était là, près de moi, ou plutôt derrière son bureau chargé de livres de la rue Villebois-Mareuil.

Les historiens de la science, qui sont encore assez peu nombreux et ont parfois besoin d'être encouragés, lui doivent une grande reconnaissance pour avoir si bien expliqué l'importance de leur mission.

#### NOTES

1. C'est pour cela que le volume dix d'*Osiris* lui fut dédié en 1952. Ce volume contient un portrait, et une biographie et bibliographie rédigées par Suzanne Delorme.
2. Dans le 1er arrondissement, près du Palais Royal. Cette rue fut nommée en l'honneur

- d'Anne d'Autriche en 1633, mais en 1792 on l'appelait rue Helvétius, parce que ce philosophe y était né en 1715. Lulli y habita. Une bonne vieille rue de Paris.
3. Paul Doumer (1857–1932). Homme d'état illustre qui devint Président de la République en 1931 mais fut assassiné l'année suivante.
  4. Ne pas confondre l'hôtel de la Marquise de Lambert avec l'hôtel Lambert, construit en 1680 pour le président Lambert de Thorigny, au Quai d'Anjou (Île Saint Louis). Voir l'article de Suzanne Delorme sur le salon de la Marquise de Lambert, berceau de l'Encyclopédie (*Revue d'histoire des sciences*, 4, 223–27, 1951).
  - 4bis. Renseignement donné par Mlle. S. Delorme. L'Abbé Barthélemy fut l'un des fondateurs de la numismatique, mais sa renommée est due surtout au *Voyage du jeune Anacharsis en Grèce* (Paris 1788). Voir Sarton: *History of Science* (1, 189, Harvard University Press, Cambridge, 1952).
  5. La différence entre l'Académie internationale d'histoire des sciences fondée en 1929 et l'Union internationale fondée en 1947 a été expliquée dans *Horus* (p. 253–56, 1952).
  6. En 1929, 1930, et 1932 il y eut deux semaines, au lieu d'une. D'autre part il n'y en eut pas de 1940 à 1945, ni en 1953.
  7. *Revue de Synthèse*. Tome 67, série générale. Tome 26, nouvelle série (240 p., Paris, Albin Michel, 1950).
  8. Emile Bréhier (1876–1952): *Transformation de la philosophie française, 1900–50* (Paris, Flammarion, 1951), p. 229.
  9. Je la cite d'après le beau livre d'Antonina Vallentin: *Le drame d'Albert Einstein* (Paris, Plon, 1954), p. 126. La source n'y est pas indiquée.
  10. *An jure inter scepticos Gassendus numeratus fuerit* (Lutetiae Parisiorum edebant Hachette et socii 1898).
  - 10 bis. La Société scientifique et littéraire des Basses-Alpes a organisé des fêtes à Digne du 5 au 7 août 1955 pour célébrer ce tercentenaire, ainsi qu'une excursion à Champtercier, le pays natal de Gassendi. Celui-ci était Prévôt de la Cathédrale de Digne.
  11. Pierre Gassendi (1955), p. 168. C'est à la suite de cela que M. Adam cite les mots de Gassendi auxquels j'ai fait allusion plus haut «*Historia certe est vitae lux.*»
  12. *Opera omnia in sex tomos divisa* (6 vols. folio, Lyon 1658). Nouvelle édition (6 vols., folio, Florence 1727).
  13. François Bernier (1620–88), médecin de Montpellier, est justement célèbre à cause de ses voyages en Orient et de son séjour de douze années à la cour d'Aurangzeb. Ses *Voyages, contenant la description des Etats du Grand Mogol, de l'Hindoustan, du royaume de Kachemire, etc.* parurent pour la première fois au complet à Amsterdam en 1699 (2 petits volumes). Son *Abrégé de la philosophie de M. Gassendi* fut publié à Paris en 1674–75. Nouvelle édition en 8 tomes (Lyon 1678). Troisième édition avec «les doutes de M. Bernier» (sept tomes en 6 volumes, Paris 1684). Les *Doutes* avaient été publiées séparément dès 1682.
  14. Les deux citations qui suivent sont extraites de son autobiographie, *La montée de l'esprit* (1955), p. 137, 110.
  15. Le mot grec *synthesis* et le mot latin *religio* ont une certaine analogie, mais les résonances du second sont plus riches.
  16. *Le Germanisme contre l'esprit français* (1919), *Les Allemagnes, réflexions sur la guerre et sur la paix* (1939), *Machiavel et l'Allemagne* (1940), *Le mal de la jeunesse allemande* (1946), *Allemagne, le contre et le pour* (1950). Tous chez Albin Michel à Paris.

# THE MOTION OF THE MOON IN TAMIL ASTRONOMY

by

I. V. M. Krishna Rav\*

## *Introduction*

In Osiris (1952) Neugebauer<sup>1</sup> has described how the Tamils in India calculated lunar eclipses by means of a process known as the Vakyam Process and by the aid of some tables as described by Le Gentil<sup>2</sup> and by Warren<sup>3</sup>. Neugebauer remarks that without further detailed textual information it will not be possible to get to know the theory underlying the construction of such tables. Van der Waerden<sup>4</sup> says that this is too pessimistic a view to take. He has analysed the table for the solar motion by representing the values by finite Fourier series and has arrived at the conclusion that the method of calculation was definitely trigonometric, and that the model used was most likely a concenter model. It shall be our endeavour in this paper, by adopting a method somewhat similar to that of van der Waerden, to reconstruct the probable theory underlying the table of lunar motion.

## *The Table of Lunar Motion*

We shall here reproduce the table of the day-by-day lunar motion as given by Warren (Table XXVI), with a few corrections.

The third column shows the daily motion of the moon in minutes of the arc, and the second column gives, by continuous addition, the total motion of the moon in terms of zodiacal signs and degrees and minutes.

It could be seen from the table that the values in the third column were exactly symmetrical about the 124th and 125th days, with the

\* Mathemat. Institut, Universität Zürich.

exception of three values, one for the 108th day, one for the 183rd day and one for the 247th day. On checking with the second column, we found these three to be erroneous, and we have substituted the correct values to make the table exactly symmetrical. Further, one probably typographical error in the second column for the 27th day has been corrected. In all these cases, Le Gentil's table was found to give the correct values.

### *Derivation of the Formula for a Finite Fourier Series*

Let  $U(t)$  be the motion of the moon in  $t$  days as given by the table, and  $\hat{v}$  its mean daily velocity. Then we have

$$f(t) = U(t) - \hat{v} \cdot t \quad \text{as a periodic function of } t \text{ with the period } p = N/9 \quad \text{where } N = 248.$$

We shall represent this function  $f(t)$ , for integer values of  $t$ , by a finite Fourier series. As the values in the table are exactly symmetrical about the 124th and 125th days, the function is odd and hence can be represented by a pure sine series:

$$f(t) = b_1 \sin at + b_2 \sin 2at + \dots + b_{123} \sin 123at$$

where 
$$a = \frac{2\pi}{p} = \frac{18\pi}{N}.$$

We shall now derive a formula by means of which we can compute the coefficients:

Multiplying both sides by  $\sin kat$  and summing up  $t$ , we obtain

$$\begin{aligned} & \sum_t f(t) \cdot \sin kat \\ &= b_1 \sum_t \sin at \cdot \sin kat + b_2 \sum_t \sin 2at \cdot \sin kat + \dots \\ & \quad + b_k \sum_t \sin^2 kat + \dots \end{aligned}$$

In each of these sums  $t$  ranges from 1 to  $N = 248$ .

The following formula is well known:

$$\sigma_N(\alpha) = \frac{1}{2} + \cos \alpha + \cos 2\alpha + \dots + \cos N\alpha = \frac{\sin(N + \frac{1}{2})\alpha}{2 \sin \frac{1}{2}\alpha}.$$

*Lunar Table*

| Days | Moon's Phase<br>or<br>Total Motion of Moon |    |    | Daily<br>Motion<br>of<br>Moon | Days | Moon's Phase<br>or<br>Total Motion of Moon |    |    | Daily<br>Motion<br>of<br>Moon | Days | Moon's Phase<br>or<br>Total Motion of Moon |    |    | Daily<br>Motion<br>of<br>Moon |
|------|--------------------------------------------|----|----|-------------------------------|------|--------------------------------------------|----|----|-------------------------------|------|--------------------------------------------|----|----|-------------------------------|
| 1    | 0                                          | 12 | 3  | 723                           | 43   | 6                                          | 28 | 27 | 857                           | 85   | 1                                          | 7  | 27 | 728                           |
| 2    | 0                                          | 24 | 9  | 726                           | 44   | 7                                          | 12 | 37 | 850                           | 86   | 1                                          | 19 | 43 | 736                           |
| 3    | 1                                          | 6  | 22 | 733                           | 45   | 7                                          | 26 | 39 | 842                           | 87   | 2                                          | 2  | 10 | 747                           |
| 4    | 1                                          | 18 | 44 | 742                           | 46   | 8                                          | 10 | 30 | 831                           | 88   | 2                                          | 14 | 49 | 759                           |
| 5    | 2                                          | 1  | 19 | 755                           | 47   | 8                                          | 24 | 7  | 817                           | 89   | 2                                          | 27 | 43 | 774                           |
| 6    | 2                                          | 14 | 9  | 770                           | 48   | 9                                          | 7  | 29 | 802                           | 90   | 3                                          | 10 | 53 | 790                           |
| 7    | 2                                          | 27 | 13 | 784                           | 49   | 9                                          | 20 | 35 | 786                           | 91   | 3                                          | 24 | 18 | 805                           |
| 8    | 3                                          | 10 | 33 | 800                           | 50   | 10                                         | 3  | 26 | 771                           | 92   | 4                                          | 7  | 58 | 820                           |
| 9    | 3                                          | 24 | 9  | 816                           | 51   | 10                                         | 16 | 2  | 756                           | 93   | 4                                          | 21 | 52 | 834                           |
| 10   | 4                                          | 7  | 58 | 829                           | 52   | 10                                         | 28 | 26 | 744                           | 94   | 5                                          | 5  | 56 | 844                           |
| 11   | 4                                          | 21 | 58 | 840                           | 53   | 11                                         | 10 | 40 | 734                           | 95   | 5                                          | 20 | 8  | 852                           |
| 12   | 5                                          | 6  | 8  | 850                           | 54   | 11                                         | 22 | 46 | 726                           | 96   | 6                                          | 4  | 26 | 858                           |
| 13   | 5                                          | 20 | 25 | 857                           | 55   | 0                                          | 4  | 49 | 723                           | 97   | 6                                          | 18 | 45 | 859                           |
| 14   | 6                                          | 4  | 44 | 859                           | 56   | 0                                          | 16 | 52 | 723                           | 98   | 7                                          | 3  | 2  | 857                           |
| 15   | 6                                          | 19 | 2  | 858                           | 57   | 0                                          | 28 | 58 | 726                           | 99   | 7                                          | 17 | 13 | 851                           |
| 16   | 7                                          | 3  | 15 | 853                           | 58   | 1                                          | 11 | 10 | 732                           | 100  | 8                                          | 1  | 17 | 844                           |
| 17   | 7                                          | 17 | 22 | 847                           | 59   | 1                                          | 23 | 31 | 741                           | 101  | 8                                          | 15 | 8  | 831                           |
| 18   | 8                                          | 1  | 17 | 835                           | 60   | 2                                          | 6  | 5  | 754                           | 102  | 8                                          | 28 | 47 | 819                           |
| 19   | 8                                          | 15 | 1  | 824                           | 61   | 2                                          | 18 | 52 | 767                           | 103  | 9                                          | 12 | 10 | 803                           |
| 20   | 8                                          | 28 | 29 | 808                           | 62   | 3                                          | 1  | 55 | 783                           | 104  | 9                                          | 25 | 18 | 788                           |
| 21   | 9                                          | 11 | 42 | 793                           | 63   | 3                                          | 15 | 14 | 799                           | 105  | 10                                         | 8  | 11 | 773                           |
| 22   | 9                                          | 24 | 40 | 778                           | 64   | 3                                          | 28 | 47 | 813                           | 106  | 10                                         | 20 | 48 | 757                           |
| 23   | 10                                         | 7  | 23 | 763                           | 65   | 4                                          | 12 | 35 | 828                           | 107  | 11                                         | 3  | 14 | 746                           |
| 24   | 10                                         | 19 | 52 | 749                           | 66   | 4                                          | 26 | 34 | 839                           | 108  | 11                                         | 15 | 28 | 734                           |
| 25   | 11                                         | 2  | 10 | 738                           | 67   | 5                                          | 10 | 44 | 850                           | 109  | 11                                         | 27 | 36 | 728                           |
| 26   | 11                                         | 14 | 19 | 729                           | 68   | 5                                          | 24 | 59 | 855                           | 110  | 0                                          | 9  | 39 | 723                           |
| 27   | 11                                         | 26 | 24 | 725                           | 69   | 6                                          | 9  | 17 | 858                           | 111  | 0                                          | 21 | 41 | 722                           |
| 28   | 0                                          | 8  | 26 | 722                           | 70   | 6                                          | 23 | 36 | 859                           | 112  | 1                                          | 3  | 46 | 725                           |
| 29   | 0                                          | 20 | 30 | 724                           | 71   | 7                                          | 7  | 51 | 855                           | 113  | 1                                          | 15 | 58 | 732                           |
| 30   | 1                                          | 2  | 38 | 728                           | 72   | 7                                          | 21 | 58 | 847                           | 114  | 1                                          | 28 | 18 | 740                           |
| 31   | 1                                          | 14 | 55 | 737                           | 73   | 8                                          | 5  | 55 | 837                           | 115  | 2                                          | 10 | 50 | 752                           |
| 32   | 1                                          | 27 | 23 | 748                           | 74   | 8                                          | 19 | 40 | 825                           | 116  | 2                                          | 23 | 36 | 766                           |
| 33   | 2                                          | 10 | 4  | 761                           | 75   | 9                                          | 3  | 10 | 810                           | 117  | 3                                          | 6  | 37 | 781                           |
| 34   | 2                                          | 23 | 0  | 776                           | 76   | 9                                          | 16 | 25 | 795                           | 118  | 3                                          | 19 | 54 | 797                           |
| 35   | 3                                          | 6  | 12 | 792                           | 77   | 9                                          | 29 | 24 | 779                           | 119  | 4                                          | 3  | 26 | 812                           |
| 36   | 3                                          | 19 | 39 | 807                           | 78   | 10                                         | 12 | 8  | 764                           | 120  | 4                                          | 17 | 12 | 826                           |
| 37   | 4                                          | 3  | 21 | 822                           | 79   | 10                                         | 24 | 39 | 751                           | 121  | 5                                          | 1  | 11 | 839                           |
| 38   | 4                                          | 17 | 15 | 834                           | 80   | 11                                         | 6  | 58 | 739                           | 122  | 5                                          | 15 | 19 | 848                           |
| 39   | 5                                          | 1  | 20 | 845                           | 81   | 11                                         | 19 | 8  | 730                           | 123  | 5                                          | 29 | 34 | 855                           |
| 40   | 5                                          | 15 | 33 | 853                           | 82   | 0                                          | 1  | 13 | 725                           | 124  | 6                                          | 13 | 52 | 858                           |
| 41   | 5                                          | 29 | 51 | 858                           | 83   | 0                                          | 13 | 15 | 722                           | 125  | 6                                          | 28 | 10 | 858                           |
| 42   | 6                                          | 14 | 10 | 859                           | 84   | 0                                          | 25 | 19 | 724                           | 126  | 7                                          | 12 | 25 | 855                           |

| Days | Moon's Phase<br>or<br>Total Motion of Moon |    |    | Daily<br>Motion<br>of<br>Moon | Days | Moon's Phase<br>or<br>Total Motion of Moon |    |    | Daily<br>Motion<br>of<br>Moon | Days | Moon's Phase<br>or<br>Total Motion of Moon |    |    | Daily<br>Motion<br>of<br>Moon |
|------|--------------------------------------------|----|----|-------------------------------|------|--------------------------------------------|----|----|-------------------------------|------|--------------------------------------------|----|----|-------------------------------|
| 127  | 7                                          | 26 | 33 | 848                           | 169  | 2                                          | 3  | 5  | 739                           | 211  | 8                                          | 24 | 23 | 834                           |
| 128  | 8                                          | 10 | 32 | 839                           | 170  | 2                                          | 15 | 36 | 751                           | 212  | 9                                          | 8  | 5  | 822                           |
| 129  | 8                                          | 24 | 18 | 826                           | 171  | 2                                          | 28 | 20 | 764                           | 213  | 9                                          | 21 | 32 | 807                           |
| 130  | 9                                          | 7  | 50 | 812                           | 172  | 3                                          | 11 | 19 | 779                           | 214  | 10                                         | 4  | 44 | 792                           |
| 131  | 9                                          | 21 | 7  | 797                           | 173  | 3                                          | 24 | 34 | 795                           | 215  | 10                                         | 17 | 40 | 776                           |
| 132  | 10                                         | 4  | 8  | 781                           | 174  | 4                                          | 8  | 4  | 810                           | 216  | 11                                         | 0  | 21 | 761                           |
| 133  | 10                                         | 16 | 54 | 766                           | 175  | 4                                          | 21 | 49 | 825                           | 217  | 11                                         | 12 | 49 | 748                           |
| 134  | 10                                         | 29 | 26 | 752                           | 176  | 5                                          | 5  | 46 | 837                           | 218  | 11                                         | 25 | 6  | 737                           |
| 135  | 11                                         | 11 | 46 | 740                           | 177  | 5                                          | 19 | 53 | 847                           | 219  | 0                                          | 7  | 14 | 728                           |
| 136  | 11                                         | 23 | 58 | 732                           | 178  | 6                                          | 4  | 8  | 855                           | 220  | 0                                          | 19 | 18 | 724                           |
| 137  | 0                                          | 6  | 3  | 725                           | 179  | 6                                          | 18 | 27 | 859                           | 221  | 1                                          | 1  | 20 | 722                           |
| 138  | 0                                          | 18 | 5  | 722                           | 180  | 7                                          | 2  | 45 | 858                           | 222  | 1                                          | 13 | 25 | 725                           |
| 139  | 1                                          | 0  | 8  | 723                           | 181  | 7                                          | 17 | 0  | 855                           | 223  | 1                                          | 25 | 34 | 729                           |
| 140  | 1                                          | 12 | 16 | 728                           | 182  | 8                                          | 1  | 10 | 850                           | 224  | 2                                          | 7  | 52 | 738                           |
| 141  | 1                                          | 24 | 30 | 734                           | 183  | 8                                          | 15 | 9  | 839                           | 225  | 2                                          | 20 | 21 | 749                           |
| 142  | 2                                          | 6  | 56 | 746                           | 184  | 8                                          | 28 | 57 | 828                           | 226  | 3                                          | 3  | 4  | 763                           |
| 143  | 2                                          | 19 | 33 | 757                           | 185  | 9                                          | 12 | 30 | 813                           | 227  | 3                                          | 16 | 2  | 778                           |
| 144  | 3                                          | 2  | 26 | 773                           | 186  | 9                                          | 25 | 49 | 799                           | 228  | 3                                          | 29 | 15 | 793                           |
| 145  | 3                                          | 15 | 34 | 788                           | 187  | 10                                         | 8  | 52 | 783                           | 229  | 4                                          | 12 | 43 | 808                           |
| 146  | 3                                          | 28 | 57 | 803                           | 188  | 10                                         | 21 | 39 | 767                           | 230  | 4                                          | 26 | 27 | 824                           |
| 147  | 4                                          | 12 | 36 | 819                           | 189  | 11                                         | 4  | 13 | 754                           | 231  | 5                                          | 10 | 22 | 835                           |
| 148  | 4                                          | 26 | 27 | 831                           | 190  | 11                                         | 16 | 34 | 741                           | 232  | 5                                          | 24 | 29 | 847                           |
| 149  | 5                                          | 10 | 31 | 844                           | 191  | 11                                         | 28 | 46 | 732                           | 233  | 6                                          | 8  | 42 | 853                           |
| 150  | 5                                          | 24 | 42 | 851                           | 192  | 0                                          | 10 | 52 | 726                           | 234  | 6                                          | 23 | 0  | 858                           |
| 151  | 6                                          | 8  | 59 | 857                           | 193  | 0                                          | 22 | 55 | 723                           | 235  | 7                                          | 7  | 19 | 859                           |
| 152  | 6                                          | 23 | 18 | 859                           | 194  | 1                                          | 4  | 58 | 723                           | 236  | 7                                          | 21 | 36 | 857                           |
| 153  | 7                                          | 7  | 36 | 858                           | 195  | 1                                          | 17 | 4  | 726                           | 237  | 8                                          | 5  | 46 | 850                           |
| 154  | 7                                          | 21 | 48 | 852                           | 196  | 1                                          | 29 | 18 | 734                           | 238  | 8                                          | 19 | 46 | 840                           |
| 155  | 8                                          | 5  | 52 | 844                           | 197  | 2                                          | 11 | 42 | 744                           | 239  | 9                                          | 3  | 35 | 829                           |
| 156  | 8                                          | 19 | 46 | 834                           | 198  | 2                                          | 24 | 18 | 756                           | 240  | 9                                          | 17 | 11 | 816                           |
| 157  | 9                                          | 3  | 26 | 820                           | 199  | 3                                          | 7  | 9  | 771                           | 241  | 10                                         | 0  | 31 | 800                           |
| 158  | 9                                          | 16 | 51 | 805                           | 200  | 3                                          | 20 | 15 | 786                           | 242  | 10                                         | 13 | 35 | 784                           |
| 159  | 10                                         | 0  | 1  | 790                           | 201  | 4                                          | 3  | 37 | 802                           | 243  | 10                                         | 26 | 25 | 770                           |
| 160  | 10                                         | 12 | 55 | 774                           | 202  | 4                                          | 17 | 14 | 817                           | 244  | 11                                         | 9  | 0  | 755                           |
| 161  | 10                                         | 25 | 34 | 759                           | 203  | 5                                          | 1  | 5  | 831                           | 245  | 11                                         | 21 | 22 | 742                           |
| 162  | 11                                         | 8  | 1  | 747                           | 204  | 5                                          | 15 | 7  | 842                           | 246  | 0                                          | 3  | 35 | 733                           |
| 163  | 11                                         | 20 | 17 | 736                           | 205  | 5                                          | 29 | 17 | 850                           | 247  | 0                                          | 15 | 41 | 726                           |
| 164  | 0                                          | 2  | 25 | 728                           | 206  | 6                                          | 13 | 34 | 857                           | 248  | 0                                          | 27 | 44 | 723                           |
| 165  | 0                                          | 14 | 29 | 724                           | 207  | 6                                          | 27 | 53 | 859                           |      |                                            |    |    |                               |
| 166  | 0                                          | 26 | 31 | 722                           | 208  | 7                                          | 12 | 11 | 858                           |      |                                            |    |    |                               |
| 167  | 1                                          | 8  | 36 | 725                           | 209  | 7                                          | 26 | 24 | 853                           |      |                                            |    |    |                               |
| 168  | 1                                          | 20 | 46 | 730                           | 210  | 8                                          | 10 | 29 | 845                           |      |                                            |    |    |                               |

We further have

$$\sum_t \sin kat \cdot \sin nat = \frac{1}{2} \sum_t \cos (n - k) at - \frac{1}{2} \sum_t \cos (n + k) at.$$

The cosine sums can be computed by means of the preceding formula. The result is

$$\sum_t \sin kat \cdot \sin nat = \begin{cases} 0 & n \neq k \\ N/2 & n = k. \end{cases}$$

Our previous formula now yields

$$b_k = \frac{2}{N} \cdot \sum_t f(t) \cdot \sin kat$$

where  $t$  ranges from 1 to  $N = 248$ .

#### *Probable Models Used to Compute the Lunar Table*

We shall consider a few models that are probable, and calculate the Fourier series that should be expected if they were used for computing the values of the table. In all cases we shall first find an infinite Fourier series valid for all  $t$ , and next replace it by a finite series valid for integer  $t$ .

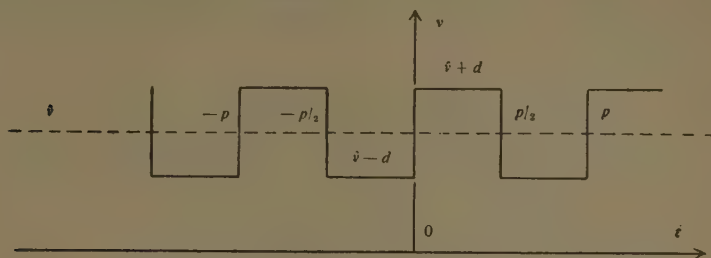
The Babylonian lunar and planetary theories are of two categories, one according to which the velocity is constant, jumping at regular intervals, and one according to which the velocity increases linearly to a maximum, then decreases linearly to a minimum, and so on regularly. On the other hand, Greek theories make use of eccenters or epicycles with concentrers, sometimes combined with equant points.

An epicycle is a small circle whose centre moves on a larger circle about the earth. The epicycle radius may be constant or variable, but we shall restrict ourselves to the case of a constant radius. The moon (sun or planet) moves on the epicycle, turning round its centre with constant velocity.

An eccenter is an eccentric circle about the earth. An equant point is a fixed point inside the circle such that the motion of the moon appears uniform as seen from the point. Ptolemy, in his planetary theory, combines an eccenter with an equant point. The Tamil theory of the sun combines a concentrer with an equant point.

Therefore, we shall consider the following possibilities:

a) The velocity of the moon jumps:



Here the function is

$$v(t) - \hat{v} = \begin{cases} \hat{v} + d & 0 < t < p/2 \\ \hat{v} - d & -p/2 < t < 0. \end{cases}$$

Putting again  $a = \frac{2\pi}{p}$ , the function may be expanded into an infinite Fourier series. As the function  $v(t) - \hat{v}$  is odd, we have

$$v(t) - \hat{v} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \cdot \sin nat$$

with 
$$f_n = \frac{2}{p} \int [v(t) - \hat{v}] \sin nat \cdot dt.$$

If  $n$  is odd, we obtain

$$f_n = \frac{1}{n\pi} \left\{ 2(\hat{v} + d) + 2(\hat{v} - d) \right\} = \frac{4d}{n\pi}.$$

If  $n$  is even,  $f_n = 0$ .

Hence we have the Fourier series

$$v(t) = \hat{v} + \frac{4d}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \sin nat \quad (n \text{ odd})$$

$$\text{or } v(t) = \hat{v} + \frac{4d}{\pi} \left\{ \sin at + \frac{1}{3} \cdot \sin 3at + \frac{1}{5} \sin 5at + \dots \right\}.$$

We now replace  $t$  by  $t - p/4$ , thus shifting the origin on the time-axis to the middle of the segment of slow motion. Thus we get

$$v(t) = \hat{v} + \frac{4d}{\pi} \left\{ -\cos at + \frac{1}{3} \cos 3at - \frac{1}{5} \cos 5at + \dots \right\}.$$

To find the series representing the motion of the moon, we integrate, obtaining

$$U(t) = \int v(t) \cdot dt \\ = \hat{v}t + \frac{4d}{\pi a} \left\{ -\sin at + \frac{1}{3^2} \sin 3at - \frac{1}{5^2} \sin 5at + \dots \right\}$$

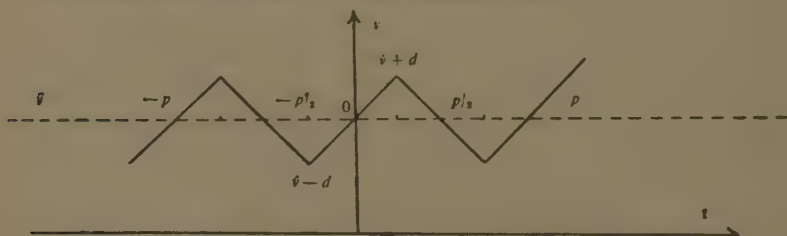
$$\text{or } f(t) = -\frac{4d}{\pi a} \left\{ \sin at - \frac{1}{3^2} \sin 3at + \frac{1}{5^2} \sin 5at + \dots \right\}.$$

The terms tend to zero rather slowly. The coefficient of  $\sin 3at$  is

$$f_3 = -\frac{1}{9} f_1$$

where  $f_1$  is the coefficient of  $\sin at$ .

b) The velocity of the moon is a linear zigzag function:



Here the function is

$$v(t) - \hat{v} = \begin{cases} t & -\frac{p}{4} < t < \frac{p}{4} \\ (p/2 - t) & \frac{p}{4} < t < \frac{3p}{4} \end{cases}$$

By the same method as in case a) we find

$$v(t) = \hat{v} - \frac{8d}{\pi^2} \left\{ \cos at + \frac{1}{3^2} \cos 3at + \frac{1}{5^2} \cos 5at + \dots \right\}$$

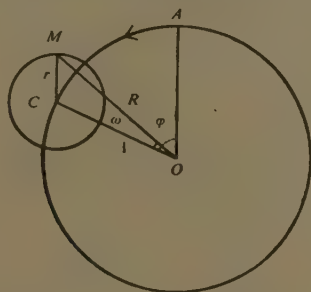
$$\text{and } U(t) = \hat{v}t - \frac{8d}{\pi^2 a} \left\{ \sin at + \frac{1}{3^3} \sin 3at + \dots \right\}$$

$$\text{or } f(t) = -\frac{8d}{\pi^2 a} \left\{ \sin at + \frac{1}{3^3} \sin 3at + \frac{1}{5^3} \sin 5at + \dots \right\}.$$

In this series we find that the coefficient of  $\sin 3at$  is  $1/27$  times that of  $\sin at$ . The terms tend to zero faster than in the series obtained under a), but not very rapidly.

c) *The model is an eccenter with uniform motion.*

It is well known that this model is equivalent to an epicycle model in which the epicycle radius  $CM$  always remains parallel to a fixed direction  $OA$ .



Now, let  $OM = R$ ,  $OC = 1$ , and  $MC = r$ .

Since  $C$  has uniform motion, the angle  $AOC = \varphi$  is proportional to time:

$$\varphi = at.$$

The triangle  $OCM$  is congruent with a triangle with vertices

$$0, 1 \text{ and } 1 + r \cdot e^{i\varphi}$$

in the complex plane. Hence we have

$$Re^{i\omega} = 1 + re^{i\varphi}.$$

Taking logarithms, we obtain

$$\begin{aligned} \log R + i\omega &= \log (1 + re^{i\varphi}) \\ &= re^{i\varphi} - \frac{r^2}{2} e^{2i\varphi} + \frac{r^3}{3} e^{3i\varphi} - \frac{r^4}{4} e^{4i\varphi} + \dots \end{aligned}$$

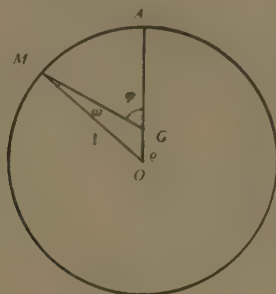
Hence  $\omega$  is the imaginary part of the series:

$$\omega = r \sin \varphi - \frac{1}{2} r^2 \cdot \sin 2\varphi + \frac{1}{3} r^3 \sin 3\varphi \dots$$

If  $r$  is small, the terms tend to zero very rapidly.

d) *The model is a concenter with an equant point.*

This means that the motion appears uniform from the point  $G$  at a distance  $\rho$  from the centre of the circle.



The angle  $\varphi$  at  $G$  is proportional to time:

$$\varphi = at.$$

We have

$$\frac{\sin \omega}{\rho} = \frac{\sin \varphi}{1},$$

i. e.,  $\sin \omega = \rho \sin \varphi$

or  $\omega = \sin^{-1}(\rho \sin \varphi)$

$$= \rho \sin \varphi + \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho^3}{3} \sin^3 \varphi + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{\rho^5}{5} \sin^5 \varphi + \dots$$

For the sun and the moon  $\rho$  does not exceed 0.1; hence, already the third term of the series is smaller than  $10^{-6}$ . Neglecting all terms after the second one, we are left with the finite series

$$\begin{aligned} \omega &= \rho \sin \varphi + \frac{1}{6} \rho^3 \left( \frac{3}{4} \sin \varphi - \frac{1}{4} \sin \varphi \right) \\ &= \rho \left( 1 + \frac{\rho^2}{8} \right) \sin \varphi - \frac{1}{24} \rho^3 \sin 3 \varphi. \end{aligned}$$

*Estimation of Errors.*

We shall consider three kinds of errors: (1), (2) and (3).

(1) *Errors involved in the Fourier coefficients owing to the curtailment of the infinite series.*

In analysing a given table for the daily motion, we use only integer values of  $t$ , and the function  $f(t)$  may be expressed by a finite Fourier series. On the other hand, theoretical models of any one of our four kinds lead to an infinite series, valid for all values of  $t$ :

$$f(t) = \sum_1^{\infty} f_k \cdot \sin kat. \quad \left(a = \frac{2\pi}{p}\right).$$

Now, if such a function  $f(t)$  is considered only for integer values of  $t$  from 1 to  $N = 9p$ , and represented by a finite series

$$f(t) = \sum_1^v b_k \sin kat. \quad \left(v = \frac{N}{2}\right),$$

the  $b_k$  will not be equal to  $f_k$ . We have to determine the values of  $b_k - f_k$ .

Remembering that  $a = \frac{18\pi}{N}$ , we have,

if  $r$  is odd,

$$\sin\left(\frac{rN}{2} + k\right)at = \sin(9tr\pi + k)at = (-1)^t \sin kat,$$

and if  $r$  is even,

$$\sin\left(\frac{rN}{2} + k\right)at = \sin(9tr\pi + k)at = \sin kat.$$

Hence the infinite series can be written as

$$f(t) = \sum_{k=0}^{123} \left( f_k + (-1)^t \sum_{\substack{r=1 \\ r \text{ odd}}}^{\infty} f_{\frac{rN}{2} + k} + \sum_{\substack{r=1 \\ r \text{ even}}}^{\infty} f_{\frac{rN}{2} + k} \right) \sin kat.$$

Therefore the error involved in the Fourier coefficients is

$$b_k - f_k = (-1)^t \sum_{\substack{r=1 \\ r \text{ odd}}}^{\infty} f_{\frac{rN}{2} + k} + \sum_{\substack{r=1 \\ r \text{ even}}}^{\infty} f_{\frac{rN}{2} + k}.$$

We shall now compute this difference in the cases of our four models:

a) The series is

$$f(t) = M \left( \sin at - \frac{1}{3^2} \sin 3at + \frac{1}{5^2} \sin 5at - \dots \right)$$

where

$$M = -\frac{4d}{\pi a}.$$

Stopping the infinite series at the 123rd term, we find the error involved in the Fourier coefficients to be

$$\begin{aligned} b_k - f_k &= (-1)^t \sum_{\substack{r=1 \\ r \text{ odd}}}^{\infty} f_{\frac{rN}{2}+k} + \sum_{\substack{r=1 \\ r \text{ even}}}^{\infty} f_{\frac{rN}{2}+k} \\ &= M \left\{ \frac{(-1)^t}{(124+k)^2} + \frac{1}{(248+k)^2} + \frac{(-1)^t}{(372+k)^2} + \dots \right\} \\ &\leq M \left\{ \frac{1}{(124+k)^2} + \frac{1}{(248+k)^2} + \frac{1}{(372+k)^2} + \dots \right\} \\ &< M \left\{ \frac{1}{(124)^2} + \frac{1}{(248)^2} + \frac{1}{(372)^2} + \dots \right\} \\ &= \frac{M}{(124)^2} \left\{ 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots \right\}. \end{aligned}$$

The expression within the brackets is the well-known zeta function or hyperharmonic series. Writing

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots &= \\ 1 + \left( \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} \right) + \left( \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{7^2} \right) + \left( \frac{1}{8^2} + \dots + \frac{1}{15^2} \right) + \dots \end{aligned}$$

and comparing with a geometric series, we see that the sum does not exceed 2. So

$$b_k - f_k < \frac{M}{(124)^2} \cdot 2 < 10^{-3} \cdot M.$$

Hence the  $b_k$  are practically equal to  $f_k$ . The conclusion  $f_3 = -\frac{1}{9} f_1$

remains true, for all practical purposes, for the coefficients  $b_3$  and  $b_1$  of the finite series.

b) The series is

$$f(t) = N \left( \sin at + \frac{1}{3^3} \sin 3at + \frac{1}{5^3} \sin 5at + \dots \right)$$

where 
$$N = -\frac{8d}{\pi^2 a}.$$

By following a procedure exactly similar to that followed in a) we arrive at the result

$$\begin{aligned} b_k - f_k &< \frac{N}{(124)^3} \left( 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots \right) \\ &< \frac{N}{(124)^3} \cdot \frac{4}{3} < 10^{-6} \cdot N. \end{aligned}$$

Here again the conclusion  $f_3 = \frac{1}{27}f_1$  remains practically true for  $b_3$  and  $b_1$  of the finite series.

c) The series is

$$\omega = r \sin \varphi - \frac{1}{2} r^2 \sin 2\varphi + \frac{1}{3} r^3 \sin 3\varphi \dots \quad (\varphi = at).$$

Hence,

$$b_k - f_k = \frac{(-1)^t \cdot r^{124+k}}{124+k} + \frac{r^{248+k}}{248+k} + \frac{(-1)^t \cdot r^{372+k}}{372+k} + \dots$$

Remembering that  $r < 1$ , we have

$$\begin{aligned} b_k - f_k &< \frac{r^{124}}{124} + \frac{r^{248}}{248} + \frac{r^{372}}{372} + \dots \\ &= \frac{r^{124}}{124} \left\{ 1 + \frac{r^{124}}{2} + \frac{r^{248}}{3} + \frac{r^{372}}{4} + \dots \right\} \\ &< \frac{r^{124}}{124} \left\{ 1 + r^v + r^{2v} + r^{3v} + \dots \right\} \end{aligned}$$

where  $v = 124.$

This is a geometric series with common ratio  $r^v$ .

$$\therefore b_k - f_k < \frac{r^{124}}{124} \cdot \frac{1}{1 - r^{124}} < 10^{-125}.$$

$$\therefore b_k - f_k < 10^{-125}.$$

This is practically zero.

d) In this case we have already seen that all terms after the second one may be neglected. The remaining series is

$$\omega = \varrho \left( 1 + \frac{\varrho^2}{8} \right) \sin \varphi - \frac{1}{24} \cdot \varrho^3 \sin 3\varphi.$$

Hence,

$$b_k - f_k = 0.$$

(2) *The errors involved in the Fourier coefficients if the values  $U(t)$  have random errors with normal distribution and standard deviation  $\sigma$ .*

In the calculation of the Fourier coefficients  $b_k$ , only  $U(1), \dots, U(123)$  are actually used because of the symmetry of the table.

Let  $U(t)$  be the values from the table,

$v(t)$  the accurate values

and  $w(t)$  the errors.

Then  $U(t) = v(t) + w(t) \quad (t = 1, 2, \dots, 123).$

We first suppose that the errors  $w(1), \dots, w(123)$  are independent and normally distributed. The probability density of the normal distribution is

$$c \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \frac{\sum w(t)^2}{\sigma^2}}$$

where the summation ranges from 1 to 123.

In our representation by Fourier series,

let  $a(l)$  be the coefficients calculated when using the values  $U(t)$ ,

$b(l)$  the accurate values

and  $c(l)$  the errors.

Then we have  $a(l) = b(l) + c(l).$

We also have  $U(t) = \sum_l a(l) \cdot \sin lat,$

that is,  $v(t) + w(t) = \sum_l (b(l) + c(l)) \cdot \sin lat.$

Therefore,  $w(t) = \sum_l c(l) \cdot \sin lat,$

and  $w(t)^2 = \left\{ c(1) \sin at + c(2) \sin 2at + \dots \right\}^2.$

But, for finite Fourier series we have the orthogonality relations:

$$\sum \sin mat \cdot \sin nat = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ N/2 & m = n \end{cases} \quad N = 248.$$

Hence,

$$\begin{aligned} \sum_1^{248} w(t)^2 &= 2 \sum_1^{123} w(t)^2 = c(1)^2 \sin^2 at + 2c(1) \cdot c(2) \cdot \sin at \sin 2at + \dots \\ &= c(1)^2 \cdot \frac{N}{2} + c(2)^2 \cdot \frac{N}{2} + \dots \\ &= 124 (c(1)^2 + c(2)^2 + \dots) \end{aligned}$$

or

$$\sum_1^{123} w(t)^2 = 62 \sum c(l)^2.$$

On substituting this relation in the expression for the probability density of the normal distribution, we obtain

$$c \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \frac{62 \sum c(l)^2}{\sigma^2}} = c \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \frac{\sum c(l)^2}{\sigma'^2}}$$

where

$$\sigma' = \frac{\sigma}{\sqrt{62}}.$$

So this is also a normal distribution with the standard deviation

$$\sigma' = \sigma / \sqrt{62}.$$

Hence the *theorem*:

If the errors  $w(t)$  are independent and have a normal distribution with standard error  $\sigma$ , the errors of the Fourier coefficients  $c_k$  are also independent and have a normal distribution with standard error

$$\sigma' = \sigma / \sqrt{62}.$$

(3) *The errors involved in the Fourier coefficients owing to the rounding off to the nearest integer of the values  $U(t)$ .*

Numbers which are given with a definite number of decimals are usually forced, that is, the last digit retained is increased by 1 when the first digit not retained is 5, 6, 7, 8 or 9. We must determine the standard deviation to which a number is liable on account of this forcing.

If a random variable is uniformly distributed between  $-\frac{1}{2}$  and  $+\frac{1}{2}$ , its squared standard error is

$$\sigma^2 = \int_{-0.5}^{+0.5} \varepsilon^2 \cdot d\varepsilon = \frac{(0.5)^3 - (-0.5)^3}{3} = \frac{1}{12}.$$

Hence,

$$\sigma_w = \frac{1}{\sqrt{12}}.$$

In our problem we have

$$c(l) = \sum_1^{123} \frac{w(t) \cdot \sin \alpha t l}{62}.$$

Let  $c(l)$  be denoted by  $Z$ , and put  $Z = \sum_1^{123} \alpha_t \cdot w(t)$ .

Our problem is to determine the mean value, the standard error and the probability distribution of the sum  $Z$ .

#### *Mean Value and Standard Error*

General theorem:

If  $Z$  is a sum of independent random variables  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ , the mean value and standard error of  $Z$  are given by

$$m = m_1 + m_2 + \dots + m_n$$

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_n^2$$

where  $m_k$  and  $\sigma_k$  are the mean values and standard errors of  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ .

In our case we have

$$Z = \alpha_1 w(1) + \dots + \alpha_n w(n)$$

with

$$n = 123.$$

The mean value of  $Z$  is zero because the mean value of  $w(t)$  is zero. The standard error is given by

$$\sigma_z^2 = \sum \alpha_i^2 \cdot \sigma_w^2, \quad \text{where } \alpha_i = \frac{\sin atl}{62}.$$

$$\therefore \alpha_i^2 = \sum \frac{\sin^2 atl}{(62)^2} = \frac{1}{(62)^2} \sum \sin^2 atl = \frac{1}{(62)^2} 62 = \frac{1}{62}.$$

$$\therefore \sigma_i^2 = \sum \alpha_i^2 \cdot \sigma_w^2 = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{62}$$

or 
$$\sigma_z = \frac{1}{\sqrt{12}} \cdot \frac{1}{\sqrt{62}} = \frac{\sigma_w}{\sqrt{62}}.$$

We observe that we have obtained the same formula for the standard deviation as in the case of a normal distribution.

So we have  $\sigma_z = 0.04$ .

This is the order of magnitude of the errors in the Fourier coefficients in the most favourable case, i. e. where the table has no other errors than those due to rounding off. Accordingly, all computed coefficients may be rounded off to two decimals.

### *Distribution of $Z$*

The *Central Limit Theorem* of the Mathematical Theory of Probability runs thus:

“Whatever be the distribution of the independent variables  $Z$ ——— subject to certain very general conditions———the sum  $Z = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n$  is asymptotically normal with mean  $m$  and standard error  $\sigma$ ”.

It follows that the distribution of the errors  $c(l)$  of the Fourier coefficients is practically the same in the case of rounding-off errors as in the case of a normal distribution of errors  $w(t)$ .

### *Fourier Analysis of the Lunar Table*

As the value of 248 days for an anomalistic period of nine anomalistic months is not very accurate, let us take the mean value  $p = 27;33,16,26$

days (in the sexagesimal system) as the exact value of one anomalistic month instead of  $\frac{248}{9}$  days.

$$\begin{aligned}\text{Then } 9p &= 248 - \varepsilon = 247;59,28 \text{ days} \\ &= 2479911 \text{ days in the decimal system.}\end{aligned}$$

The decimal point will be placed above the line to distinguish it from the multiplication dot. We find

$$\varepsilon = 0'0089 \text{ days.}$$

Let  $m$  be the motion in 248 days. We have

$$m = (9 \cdot 360^\circ) + 27^\circ 44' = 3267^\circ 44'.$$

Let us take  $v$  as the lowest velocity. With sufficient accuracy this may be equalled to the motion on the first day.

$$v \sim 12^\circ 3' = 723' \text{ per day.}$$

The motion in  $248 - \varepsilon$  days will be

$$m - v\varepsilon = 3267^\circ 37' 583''.$$

Let the mean daily velocity be  $\hat{v}$ .

$$\text{Then } \hat{v} = \frac{m - v\varepsilon}{248 - \varepsilon} = 13^\circ 10' 58306''.$$

This mean velocity can also be calculated from  $\Delta\lambda$  of the longer periods. The most accurate determination is from the longest period  $R = 4C + D = 449$  anomalistic months. We find

$$\hat{v} = 13^\circ 10' 58100''.$$

For our theory to be consistent, these values should be very nearly equal. However, the agreement is not good. We obtain a much better agreement by putting  $\varepsilon = 0$  and  $\hat{v} = \frac{m}{248}$ . Hence it is apparent that the computer of the table must have taken the mean of all the values in the table as the mean daily velocity:

$$\hat{v} = \frac{98031}{124} = 790' 58064''.$$

We can now proceed with our calculation, using the above value of  $\hat{v}$ . To simplify our operations to a certain extent, the following device has been adopted.

Let  $U(t)$  be the motion in  $t$  days,  
and let  $v$  be the mean velocity.

$$\text{Then} \quad U(t) = v \cdot t + f(t)$$

where  $f(t)$  is a periodic function with the period  $p = \frac{248}{9} = \frac{N}{9}$ .

$$\text{We put} \quad a = \frac{2\pi}{p} = \frac{9\pi}{124} = \frac{18\pi}{N}.$$

$$(1) \quad f(t) = b_1 \sin at + b_2 \sin 2at + \dots + b_{123} \sin 123at.$$

The formula for the coefficients in this equation (1) has been derived before:

$$b_k = \frac{1}{124} \sum_1^{123} f(t) \cdot \sin kat = \frac{1}{62} \sum_1^{123} f(t) \cdot \sin kat.$$

If  $k$  is odd, we have

$$\sin ka(124 - t) = \sin (9k\pi - kat) = \sin kat.$$

Hence,

$$b_k = \frac{1}{62} \left[ \sum_1^{61} \left\{ f(t) + f(124 - t) \right\} \sin kat + f(62) \sin \frac{k\pi}{2} \right]$$

$$(k = 1, 3, 5, \dots).$$

If  $k$  is even, we have

$$\sin ka(124 - t) = \sin (9k\pi - kat) = -\sin kat,$$

$$\text{and} \quad \sin ka \cdot 62 = 0.$$

Hence,

$$(2) \quad b_k = \frac{1}{62} \cdot \left\{ \sum_1^{61} \left( f(t) - f(124 - t) \right) \sin kat \right\}$$

$$(k = 2, 4, 6, \dots).$$

$$\text{Now we put} \quad f(t) - f(124 - t) = D(t).$$

We may then write (2) as

$$b_{2l} = \frac{1}{62} \cdot \sum_1^{61} D(t) \cdot \sin 2lat.$$

Again, if  $l$  is odd, we have

$$\sin 2la (62 - t) = \sin (9\pi l - 2lat) = \sin 2lat,$$

and hence,

$$b_{2l} = \frac{1}{62} \left[ \sum_1^{30} \left\{ D(t) + D(62 - t) \right\} \sin 2lat + D(31) \sin l \frac{\pi}{2} \right].$$

$$(2l = 2, 6, \dots).$$

But if  $l$  is even, we have

$$\sin 2la (62 - t) = -\sin 2lat,$$

and

$$\sin 62la = 0;$$

hence,

$$b_{2l} = \frac{1}{62} \sum_1^{30} \left\{ D(t) - D(62 - t) \right\} \sin 2lat$$

$$(2l = 4, 8, \dots).$$

Using these formulae for calculating the coefficients of our finite Fourier series, we obtain

$$b_1 = -300.88$$

$$b_2 = + 0.04$$

$$b_3 = + 0.20$$

$$b_4 = + 0.09.$$

To check the accuracy of these values the following method has been adopted:

Putting  $s(t) = U(t) + U(124 - t) = 124v + f(t) + f(124 - t)$ ,

we have the formula

$$\begin{aligned} S(t) - 2b_1 \sin at - 124v &= 2b_3 \sin 3at + 2b_5 \sin 5at + \dots + \\ &\quad 2b_{123} \sin 123at \\ &= g(t) \quad \text{say.} \end{aligned}$$

We had proved before:  $\sum g(t)^2 = \frac{N}{2} \sum c_k^2$

where  $N$  is the number of terms on the left-hand side of the equation and  $c_k$  the coefficients of the terms on the right-hand side of the equation for series given before.

Hence we obtain

$$\sum_{t=1}^{61} g(t)^2 = 122 \left( b_3^2 + b_5^2 + \dots + b_{123}^2 \right).$$

The functions  $g(t)$  can be computed since  $s(t)$ ,  $2b_1 \sin at$  and  $124v$  are known for each value of  $t$ . They have been thus computed, and we get

$$\sum_{t=1}^{61} g(t)^2 = 26'42.$$

Hence, 
$$b_3^2 + b_5^2 + \dots + b_{123}^2 = \frac{26'42}{122} = 0'22.$$

Subtracting  $b_3^2$  from this result, we obtain

$$b_5^2 + b_7^2 + \dots + b_{123}^2 = 0'22 - 0'04 = 0'18.$$

The number of terms on the left-hand side of this equation is 60.

Hence, dividing the value for  $\sum b_k^2$  obtained above by 60, we get  $S'^2$ , an expression for the variance  $\sigma'$  of the coefficients  $b_k$ .

$$\sigma'^2 \sim \frac{0'18}{60} = 0'0030.$$

We have previously derived the formula

$$\sigma'^2 = \frac{\sigma^2}{62}.$$

Hence, 
$$\sigma^2 \sim 62 \cdot 0'0030 = 0'186.$$

This is about equal to the standard error to be expected if each table value was computed as a sum of two independent terms, each rounded

off to the nearest integer, viz.  $\sigma^2 = \frac{1}{6} = 0'167$ .

Hence, for our lunar table we have obtained the series

$$f(t) = b_1 \sin at + b_2 \sin 2at + b_3 \sin 3at + b_4 \sin 4at + \dots$$

The coefficients  $b_2$  and  $b_4$  are small, being of the order of magnitude of their own standard errors. The computer of the lunar table must have meant the coefficients  $b_2, b_4$ , etc., to be zero.

Converting into radian measure, we obtain for the anomaly difference

(3)

$$\omega = -\frac{f(t) \cdot 2\pi}{360 \cdot 60} = \alpha_1 \sin at + \alpha_2 \sin 2at + \alpha_3 \sin 3at + \alpha_4 \sin 4at + \dots$$

where

$$\alpha_1 = +0.087556$$

$$\alpha_2 = -0.000010$$

$$\alpha_3 = -0.000057$$

$$\alpha_4 = -0.000027.$$

*Comparison of the Calculated Fourier Coefficients with Those of the Series for the Models Described*

From these values of the coefficients we see that the models (a) and (b) (that is, the case where the velocity jumps and the case where it is a linear zigzag function) were not used to compute the lunar table, for their coefficients decrease too slowly as compared with our series. According to models (a) and (b) the coefficient  $b_3$  should be nearly

$$-\frac{1}{9} b_1 \quad \text{or} \quad \frac{1}{27} b_1.$$

Actually,  $b_3$  is less than  $\frac{1}{1500} b_1$ .

Therefore, let us now check by the *Epicycle Hypothesis*:

We have the series

$$\omega = r \sin \varphi - \frac{1}{2} r^2 \sin 2\varphi + \frac{1}{3} r^3 \sin 3\varphi - \frac{1}{4} r^4 \sin 4\varphi + \dots,$$

that is, we obtain a series

$$\omega = a \sin \varphi + b \sin 2\varphi + c \sin 3\varphi + d \sin 4\varphi + \dots$$

where, if we put  $a = r = \alpha_1$ , we obtain

$$a = r = + 0'087556$$

$$b = -\frac{1}{2} r^2 = - 0'003833$$

$$c = +\frac{1}{3} r^3 = - 0'000224$$

$$d = -\frac{1}{4} r^4 = - 0'000015.$$

Also in this case we find that the coefficients do not decrease rapidly enough.

Let us now try the *Concenter Hypothesis*:

We had obtained the series

$$\omega = e \left( 1 + \frac{e^2}{8} \right) \cdot \sin \varphi - \frac{1}{24} e^3 \sin 3\varphi.$$

The terms with  $\sin 2\varphi$  and  $\sin 4\varphi$  are missing. This agrees with (3), in which  $\alpha_2$  and  $\alpha_4$  are small. To make the agreement of the coefficients as good as possible, we equate the first coefficients:

$$e \left( 1 + \frac{e^2}{8} \right) = \alpha_1 = + 0'087556.$$

Solving for  $e$ , we find  $e = 0'087472$ .

The coefficient of  $\sin 3\varphi$  now becomes

$$\beta_3 = -\frac{1}{24} e^3 = - 0'000028.$$

This does not differ much from

$$\alpha_3 = - 0'000057.$$

### Conclusion

Our results show that the concentric model is the most probable model used to compute the values of the lunar table. This is consistent with the

conclusion arrived at by van der Waerden with regard to the table showing the solar motion.

In conclusion, I take this opportunity to express my heart-felt gratitude to my professor, Prof., Dr. B. L. van der Waerden, for his kind and encouraging guidance throughout the course of this work.

#### NOTES

1. O. Neugebauer, *Tamil Astronomy*, *Osiris* 10, p. 252 (1952).
2. M. le Gentil, *Mémoire sur l'Inde*, *Histoire de l'Acad. royale des sciences*, Année 1772 (2<sup>e</sup> partie), Paris 1776, *Mém. de math. et phys.*, pp. 169 and 221.
3. J. Warren, *Kala Samkalita* (1825).
4. B. L. van der Waerden, *Bewegung der Sonne nach griechischen und indischen Tafeln*, *Sitzungsberich. Bayer. Akad. (math.-nat.)* 1952, p. 219.

## TAMIL ASTRONOMY

by

B. L. van der Waerden\*

In 1772 Le Gentil reported on the rules for computing solar and lunar eclipses which were used by the Tamils or Tamuls of the region of Pondicherry<sup>1</sup>. In 1825 Warren reported on the computation of lunar eclipses by a calendar maker from Pondicherry<sup>2</sup>. The methods used by the latter were exactly the same as those of Le Gentil's informant. In 1952 Neugebauer<sup>3</sup> analyzed these methods and pointed out their relations to Greek papyri of the Roman period, and to the work of Varāha Mihira. Many details of the computation were explained by Neugebauer's analysis, but quite a few questions remained unanswered. One of these, viz. the computation of the motion of the sun, was elucidated by my paper of the same year<sup>4</sup>. I found that the numerical values could be explained very well by the assumption of a concentric motion which is not uniform, but appears uniform as seen from an eccentric "equant point". Quite recently, Rav verified the same result for the lunar motion<sup>5</sup>.

In this paper a number of open questions in Tamil astronomy will be answered.

The first question concerns a long period,  $V$ , of 1 600 984 days, which Neugebauer supposed to have been incorrectly handed down. It turns out that  $V$  is not a lunar period at all, but simply the time from the remote epoch —3101, Febr. 18, to the more recent date 1282, May 22, at which the moon was in its apogee. The whole Vakyam process can be applied only to dates after May 22, 1282. For that date the computed longitude and latitude are very accurate. The Vakyam method cannot have obtained its present form before that date.

The motion of the moon during the shorter periods  $R$ ,  $C$  and  $D$ , of 12 372, 3 031 and 248 days respectively, which are approximate multiples

\* Mathemat. Institut, Universität Zürich.

of an anomalistic month, is meant as mean motion. To obtain the true motion during these periods, we have to make a small correction, which can be computed theoretically. The result is exactly the "second correction" mentioned by Le Gentil and Warren, and which these authors were unable to explain.

Next, the computation of lunar latitudes and of the rising times of zodiacal signs will be explained. It will be shown that these computations are based upon correct trigonometrical formulas, with reasonable approximations for small angles. The maximum latitude of the moon was taken as  $4^{\circ}30'$ , the inclination of the ecliptic as  $24^{\circ}$ . These values agree with those in common use in Indian astronomy.

The elements of solar motion (sidereal year, epoch and apogee) in Tamil astronomy agree with those of Aryabhata's *Aryabhatiya*. For the year and the epoch this has already been noted by Warren. Now it seemed very strange to me that the model of the solar motion should be a concenter with equant point, for that model is not known from any other Greek or Indian source. The question presented itself whether another model would not explain the tables as well. One possibility would be the model of concentric, rotating spheres proposed by Eudoxos and Kallippos. However, a much more probable explanation is offered by an approximative formula which is in general use in Indian astronomy.

If  $x$  and  $u$  are the mean and true anomalies of the sun, and  $\varrho$  is the ratio of the radii of epicycle and concenter, the formula in question is

$$(A) \quad \sin(x - u) = \varrho \sin x.$$

The formula is not exact, but the approximation is quite sufficient, and very convenient if  $x$  is given. With the aid of this formula, a table for the "equation"  $x - u$  may be computed; many such tables are in use in Indian astronomy.

Now from such a table it is possible to compute the periods in which the sun traverses the 12 zodiacal signs. If this is done correctly, the results will be just the same as those computed from the concenter with equant point, for that model also leads to formula (A).

Formula (A) also explains the Tamil table for the day-by-day motion of the moon. This explanation, within the traditional methods of Indian astronomy, seems to be the most probable one.

1. *The Vakyam Process*

In computing an eclipse, the Tamil astronomers start with a given year and a given longitude of the sun. The first step is to compute the number of days having elapsed since the first day of the first week of the Kaliyuga (—3101, Febr. 18). In Indian astronomy this number of days is called Ahargana<sup>6</sup>; it will be denoted here by  $a$ . The next step is to find the longitude of the moon by the aid of four periods, which Neugebauer has called  $V$ ,  $R$ ,  $C$ , and  $D$ . The following table gives the periods and the corresponding motions of the moon, denoted by  $v$ ,  $r$ ,  $c$ , and  $d$ :

|                     |                          |
|---------------------|--------------------------|
| $V = 1\ 600\ 984^d$ | $v = 212^\circ 0' 7''$   |
| $R = 12\ 372^d$     | $r = 297^\circ 48' 10''$ |
| $C = 3\ 031^d$      | $c = 337^\circ 31' 1''$  |
| $D = 248^d$         | $d = 27^\circ 44' 6''$   |

The process is as follows: The Ahargana  $a$  is divided by  $V$ , the remainder is divided by  $R$ , the remainder by  $C$ , and the remainder by  $D$ . The remainder of the last division is less than  $248^d$ . In the example quoted by Le Gentil (lunar eclipse of 1768, Dec. 23) the Ahargana is 1 778 701, the quotients of the divisions are 1, 14, 1, and 5, and the remainder of the last division is 238 days, so that the Ahargana is represented by

$$(1) \quad a = V + 14R + C + 5D + 238.$$

Now the quotients are multiplied by  $v$ ,  $r$ ,  $c$ , and  $d$  respectively. To the resulting sum  $v + 14r + c + 5d$  the motion of the moon during the remaining 238 days is added. This last motion is found from a separate table called "Daily motion of the moon during the 248 days" (Warren, Table XLVII), which has been studied by Rav<sup>5</sup>. The result of the addition is the longitude of the moon. The whole computation is called the Vakyam process.

2. *The Meaning of the Periods  $V$ ,  $R$ ,  $C$ , and  $D$* 

The last three periods are, as Neugebauer rightly remarks, approximate multiples of the anomalistic month. The periods  $D$ ,  $C$  and  $R = 4C + D$  contain very nearly 9, 110 and 449 such months. The period  $R$  is very accurate: on dividing it by 449, one obtains 27;33,16,26,11 days for the anomalistic month in sexagesimal notation, i. e.

$$27 + \frac{33}{60} + \frac{16}{60^2} + \frac{26}{60^3} + \frac{11}{60^4}.$$

Babylonian texts of the Seleucid age use the value 27;33,16,26,56, which is very close to the Tamil value. Hipparchos also uses the Babylonian value<sup>7</sup>.

Next we have to discuss the meaning of the fourth period,  $V$ . Neugebauer assumed that not only  $D$ ,  $C$  and  $R$ , but also  $V$  represented a multiple of the anomalistic month, and he concluded from this that at the beginning of the Kaliyuga the moon was supposed to be in its apogee. However, if  $V$  is divided by 27;33,16,26 or 27;33,16,27, it will leave a remainder of slightly more than 8 days. The Tamil astronomers knew this, for on p. 122 Warren reports that they computed the period  $V$  by adding 8 anomalistic periods, 7 periods  $D$ , one period  $C$ , 129 periods  $R$ , and 9 days, neglecting the fractions. These 9 days minus fractions agree with our 8 days plus a fraction.

Further, Neugebauer assumed that  $v$  was intended to represent the motion of the moon during the period  $V$ . However, if  $v$  is divided by  $V$ , a mean daily motion of 13;10,35,34 degree is obtained, which is quite different from the mean motion 13;10,34,51,36 obtained from the periods  $C$  and  $R$ .

To find the correct interpretation of the period  $V$ , we first have to realize that the period is very long: it begins on Febr. 18, —3101, and ends on May 22, 1282. Now the Vakyam process did not obtain its present form before 1279, for Neugebauer himself has discovered a correction term proportional to  $a - c_1$  where  $c_1$  is the Ahargana corresponding to the date 1279, Nov. 16 (Neugebauer's 1200, Nov. 16, on p. 269 seems to be a misprint).

If we apply the Vakyam process to the end of the period  $V$ , i. e. to the Ahargana  $a = V(1282, \text{May } 22)$ , we find that the computed longitude is  $v = 212^{\circ}0'7''$ , and that the moon is in its apogee at that moment. On the other hand, if the Vakyam process is applied to a date shortly before 1282, May 22, we obtain, as a result of a complicated computation with large multiples of the period  $R$ , a completely wrong longitude, a wrong apogee and a discontinuity at the end of the period  $V$ . Obviously, the Vakyam process was not intended to be used for dates before 1282, May 22. After that date the quotient of the first division is always 1, i. e. the period  $V$  occurs in the sum (1) only once.

Hence,  $V$  simply means the Ahargana of the date of the moon's apogee 1282, May 22, and  $v$  means the longitude of this apogee. This interpretation is confirmed by modern computations, as we shall see presently.

### 3. Comparison With Modern Computation

The period  $V$  ends 1 600 984 days after —3101, Febr. 18, i. e. 1282, May 22, at sunrise, for the Tamil astronomers let the day begin at sunrise (see Le Gentil, p. 225). The application of the Vakyam process to that moment gives for the longitude of the moon  $v = 212^{\circ}0'$  plus a correction of  $11'$ :

Longitude of the moon  $212^{\circ}11'$  (modern  $224^{\circ}39'$ ).

The modern computation was made for sunrise at Pondicherry. The difference of about  $12^{\circ}$  is not surprising: it is due to the use of a different initial point of the zodiac. The Tamils use a sidereal zodiac which is supposed to coincide with the tropical zodiac in the year 3600 of their era (= A.D. 499). Moreover, they assume a precession of  $54''$  a year (see Le Gentil, p. 191), which amounts to  $11^{\circ}45'$  in 783 years. This agrees well with the  $12^{\circ}28'$  difference we found before.

For the longitude of the sun we find by Tamil methods  $55^{\circ}17'$  (modern  $67^{\circ}34'$ ).

By subtraction we find:

Elongation of the moon  $156^{\circ}54'$  (modern  $157^{\circ}6'$ ).

The error is only  $12'$ , which means that the computed time of an eclipse would be about 23 minutes later than the real time.

According to the Vakyam process, the apogee of the moon has the longitude  $212^{\circ}0'$ , so the anomaly of the moon is  $11'$ . Modern computation gives about  $25'$ . The error of  $-14'$  is without any importance.

According to the Tamil tables, the longitude of the ascending node of the moon is  $312^{\circ}1'$ . Hence, the argument of latitude is  $212^{\circ}11' - 312^{\circ}1' + 360^{\circ} = 260^{\circ}10'$  (modern  $260^{\circ}31'$ ). The difference of  $-21'$  means a difference of  $2'$  at most in the latitude of the moon.

### 4. The Motion During the Periods $R$ , $C$ , and $D$

The period  $R = 4C + D$  is practically an exact multiple of the anomalistic month. Hence, the motion of the moon during this period is equal to the mean motion during the same period. The motion is 452 full rotations plus  $297^{\circ}48'10''$ . The sum is, in sexagesimal notation,

$$r = 45,16,57;48,10 \text{ degrees.}$$

From this we may compute the mean motion during one anomalistic period, and the mean daily motion

$$u = 13;10,34,51,36,36.$$

The motion during the short period  $D$  is  $d = 54,27;44,6$ . However, since  $D = 248^d$  is slightly more than 9 anomalistic months, the motion  $d$  may be interpreted in three different ways, viz:

- 1) as the (mean or true) motion during 9 anomalistic months,
- 2) as the mean motion during 248 days,
- 3) as the true motion during 248 days.

The first interpretation would require

$$(2) \quad D = \frac{9}{449} r.$$

The given numbers do not at all satisfy this relation, so 1) has to be rejected.

The interpretation 2) requires

$$(3) \quad D = \frac{248}{12\ 372} r.$$

This relation is nearly satisfied: the right side of (3) would give  $D = 54,27;44,5,19$ , whereas the actual value is  $54,27;44,6$  degrees. The interpretation 2) fits.

In case 3) we should expect a slightly smaller value of  $D$  because the period  $D$  is 9 anomalistic months plus  $\epsilon = 0;0,32$  days. During these  $\epsilon$  days at the end of the period  $D$  the motion of the moon is only  $12^\circ 3'$  per day, according to the Tamil table for day-by-day motion. As compared with the mean motion of  $13^\circ 11'$ , this means a daily retardation of  $68'$ . In  $\epsilon$  days the retardation is  $0;0,32$  times  $68'$ , i. e.  $36''$ . Hence, the motion ought to be in case 3),

$$D = 54,27;44,5 - 0;0,36 = 54,27;43,29,$$

whereas it is  $54,27;44,6$ . So 3) has to be rejected, and 2) remains as the only possible interpretation.

The same holds good for the period  $C$ . Hence, the Tamil computations are based upon the assumption of mean motion during the periods  $C = 3031^d$  and  $D = 248^d$ .

### 5. *A Correction of the Day-by-Day Motion*

The replacement of the true motion by the mean motion during the period  $D$  results in an inaccuracy as regards the position of the moon at the end of this period, and hence in an inaccuracy as to the final longitude of the moon. The Tamils add a correction term to compensate the error. This correction term may be deduced as follows:

In (1) we have 238 days in addition to 5 periods  $D$ . Now suppose, quite generally, that we have  $z$  days in addition to  $n$  periods  $D$ . The table for day-by-day motion gives a motion during these  $z$  days which we denote by  $f(z)$ . The table also gives the velocity on the last day:

$$(4) \quad w = f(z) - f(z-1).$$

For the motion during  $n$  periods  $D$ , the Vakyam process assumes the value  $nd$  computed for mean motion, and then adds  $f(z)$  for the motion during  $z$  days. Now 9 anomalistic periods are not exactly  $D$  days, but only  $D - \varepsilon$  days, where  $\varepsilon$  is 0;0,32 days. So the correct thing to do would be to take the mean motion only during  $n(D - \varepsilon)$  days and add  $f(z + n\varepsilon)$  for the remaining  $z + n\varepsilon$  days. If  $\hat{w}$  is the mean velocity of the moon, the mean motion during  $n\varepsilon$  days is  $n\varepsilon\hat{w}$ . Hence, in order to obtain the correct motion, we have to subtract  $n\varepsilon\hat{w}$  from the computed value and add  $f(z + n\varepsilon) - f(z)$ . So the correction required is

$$f(z + n\varepsilon) - f(z) - n\varepsilon\hat{w}.$$

Now  $f(z + n\varepsilon) - f(z)$  may be replaced, with sufficient accuracy, by  $n\varepsilon w$ . Hence, the correction is

$$(5) \quad n\varepsilon(w - \hat{w})$$

where  $w$  and  $\hat{w}$  are the velocity on the last day and the mean velocity, while  $n$  is the number of periods  $D$  and  $\varepsilon = 0;0,32$ . This is exactly the "second correction" mentioned by Le Gentil, Warren, and Neugebauer.

6. *Lunar Latitudes*

On p. 265 Le Gentil reproduces the following table of latitudes

| Argument | Latitude | Argument | Latitude |
|----------|----------|----------|----------|
| 1°       | 4'43"    | 10°      | 46'53"   |
| 2°       | 9'29"    | 11°      | 51'32"   |
| 3°       | 14' 8"   | 12°      | 56' 8"   |
| 4°       | 18'51"   | 13°      | 60'43"   |
| 5°       | 23'32"   | 14°      | 65'19"   |
| 6°       | 28'14"   | 15°      | 69'54"   |
| 7°       | 32'55"   | 16°      | 74'24"   |
| 8°       | 37'40"   | 17°      | 78'54"   |
| 9°       | 42'19"   | 18°      | 83'24"   |

I have tried to represent these values by a linear or quadratic function of the argument of latitude  $u$

$$(6) \quad \beta = bu + cu^2,$$

but there were systematic deviations, which cannot be explained as errors of computation. On the other hand, a trigonometric formula like

$$(7) \quad \beta = B \sin u$$

fitted quite well. The best result was obtained by assuming

$$B = 4^\circ 30'.$$

Neugebauer also feels that the small irregularities of the table are "probably due to the process of interpolation from a trigonometric table". He further remarks that the maximum lunar latitude of  $4^\circ 30'$  is found in the old and new *Sūrya-Siddhānta* as well as in the *Paulisa-Siddhānta*. I may add that the same value is given in *Aryabhatiya* I 6.

The correct trigonometric formula would be

$$(8) \quad \sin \beta = \sin B \sin u.$$

This formula would fit if  $a = 4^\circ 30' 17''$  were assumed to be the maximum latitude, which seems highly improbable.

We may conclude that the table of latitudes was obtained by trigonometrical computation, most likely by means of formula (7), assuming a maximum latitude of  $4\frac{1}{2}$  degrees.

Formula (7) is a very convenient approximation to (8). Ptolemy, in his *Handy Tables*, uses the same kind of approximation.

### 7. Right and Oblique Ascensions

According to Le Gentil (p. 205), the rising time of any sign of the tropical zodiac for the geographical latitude of Tirvalure was found as follows. First, the rising time for the "middle of the world", i. e. for latitude 0, is found from the second column of the following table. Next, the time to be added or subtracted for Tirvalure is found from the third column. The result of the addition or subtraction is given in the last column. The unit of time is 1/3600 of a day.

| Sign    | Right Ascension | Correction | Rising Time |
|---------|-----------------|------------|-------------|
| 1 or 12 | 278             | —24        | 254         |
| 2 or 11 | 299             | —19        | 280         |
| 3 or 10 | 323             | — 8        | 315         |
| 4 or 9  | 323             | + 8        | 331         |
| 5 or 8  | 299             | +19        | 318         |
| 6 or 7  | 278             | +24        | 302         |

I have checked the right ascensions by means of the exact formula from spherical trigonometry

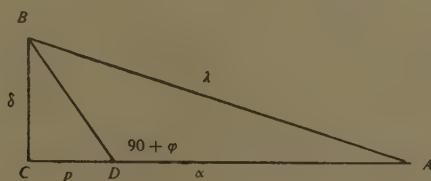


Fig. 1.

$$(9) \quad \tan \alpha = \tan \lambda \cos \varepsilon$$

and found them to be correct to the last decimal if  $\varepsilon$  is any value between  $23^{\circ}47'$  and  $24^{\circ}19'$ . Ptolemy's value,  $23^{\circ}51'20''$ , lies between these limits, but the usual value of  $24^{\circ}$  adopted by early Greek and Indian authors seems much more probable. Needless to say that (9) gives the rising time or right ascension for the whole arc  $AB = \lambda$ , so that the Indian table values have to be summed before being compared with (9).

Let  $BD$  be the horizon of rising of the point  $B$  for Tirvalure. The oblique ascension for the same arc  $AB$  is

$$AD = \alpha - p$$

where  $p = CD$  is found from the following formulas ( $\varphi =$  geogr. latitude):

$$(10) \quad \sin \delta = \sin \lambda \sin \varepsilon.$$

$$(11) \quad \tan p = \tan \varphi \tan \delta.$$

Since  $p$  is small, the arc  $p$  is approximately proportional to its  $\tan$ , and we obtain an approximation

$$(12) \quad p = f(\lambda) \tan \varphi$$

where  $f(\lambda)$  depends only on the longitude, not on the geographical latitude.

Instead of  $\tan \varphi$  the Indians use the shadow length of the gnomon at noon, which is obviously proportional to  $\tan \varphi$ . Their rule for computing the correction  $p$  actually amounts to applying the formula (12) with

$\tan \varphi = \frac{1}{5}$  for Tirvalure. I have checked their values for  $f(\lambda)$  and found

them correct for  $\varepsilon = 24^\circ$ , whereas Ptolemy's  $23^\circ 51' 20''$  did not fit so well.

The conclusion is the same as in the case of the latitude of the moon: *The Tamil rules are based upon correct trigonometry and convenient approximations for small angles.* The obliquity of the ecliptic is taken as  $24^\circ$  and the inclination of the moon's orbit as  $4^\circ 30'$ .

### *The Motion of the Sun*

In my München Academy paper<sup>4</sup>, I found that the motion of the sun according to Tamil astronomy may be represented by a concenter with an equant point. As seen from the equant point, the motion appears uniform: the angle increases proportionally to time. The distance of the equant point from the centre was found to be 0;2,15,19. The direction of the equant point was given by its longitude  $78^\circ$ .

Rav has found that the lunar motion may be represented by the same kind of model.

Now this is very strange because the said model is never mentioned either in Greek or in Indian literature. Therefore I have tried to find another explanation.

The concenter model leads to a simple formula for the true anomaly  $x = u - \omega$  if the mean anomaly  $u$  is taken as an independent variable. The formula is

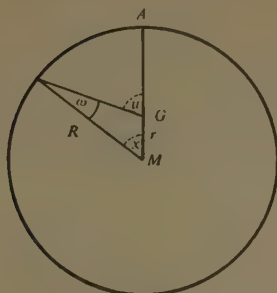


Fig. 2.

$$(13) \quad \sin \omega = \frac{r}{R} \sin u.$$

According to this formula, the values of  $\omega$  for  $u$  and  $180^\circ - u$  are equal, and the maximum of  $\omega$  is attained for  $u = 90^\circ$ . We shall call this property "symmetry about  $u = 90^\circ$ ". An epicycle or eccenter model never has this symmetry.

One model having the said symmetry is the model of concentric spheres of Eudoxos and Kallippos, as described by Schiaparelli<sup>8</sup>. Eudoxos gave the sun a uniform motion, but Kallippos added two spheres to account for the anomaly of the sun. This model would give a symmetric function,  $\omega = f(u)$ , differing very little from the one defined by (13). Still, I do not believe that the solution of the riddle lies in that direction.

The sidereal year of Tamil astronomy is 365;15,31,15 days. This is just Aryabhata's value<sup>9</sup>, as Warren<sup>10</sup> has already seen. Also the apogee at  $78^\circ$  is just the same as that of Aryabhata (Aryabhatiya I 7), and so is the beginning of the Kaliyuga at sunrise, —3101, Febr. 18. Accordingly, there are reasons to look in the direction of Aryabhata and his school.

Aryabhata's theory of the sun and moon is based upon an epicycle model, and so is the theory of the Sūrya Siddhānta<sup>11</sup>. Still, all tables for the anomaly of the sun admittedly based upon the Sūrya-Siddhānta show symmetry about  $90^\circ$ . The reason for this is that the Sūrya-Siddhānta (II 39) prescribes for the computation of the sun's equation an approximative process in which the true distance to the sun is replaced by the mean distance.

Let  $E$  be the earth,  $A$  the apogee,  $C$  the centre of the epicycle,  $r$  its radius. Let the sun be in  $P$ . Draw  $PD$  perpendicularly to  $EC$ . We then have, if  $x$  is the mean and  $x - \omega$  the true anomaly,

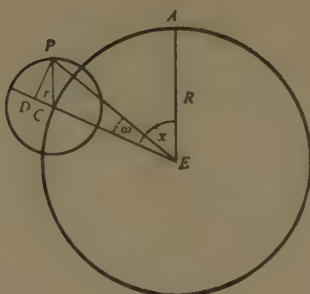


Fig. 3.

$$(14) \quad \sin \omega = \frac{PD}{PE} = \frac{r \sin x}{PE}.$$

Now if  $PE$  is replaced by the mean distance  $R$ , we obtain instead of (14)

$$(15) \quad \sin \omega = \frac{r \sin x}{R},$$

and this is just (13)!

To ascertain whether the above gives the full explanation of our Tamil table, let us compute the eccentricity

$$e = \frac{r}{R}$$

according to Aryabhata and compare it with the Tamil value.

In the new *Sūrya Siddhānta* (II 34) the epicycle of the sun is given as  $14^\circ$  at the end of the even quadrants, and  $20'$  less at the end of the odd quadrants. This means, according to II 39, that the factor  $r/R$ , by which  $\sin x$  is multiplied in (13) or (15), is  $14/360$  at the end of the even quadrants. Aryabhata does not distinguish between even and odd quadrants, but simply says that the epicycles of the moon and the sun, divided by  $4\frac{1}{2}$ , are 7 and 3 (*Aryabhatiya* I 8). Interpreted in the same way, this means that the quotient  $r/R$  is for the sun

$$e = \frac{r}{R} = \frac{13\frac{1}{2}}{360} = .0375 = 0;2,15.$$

The result of the Fourier analysis of the Tamil table was

$$(16) \quad e = .037588 = 0;2,15,19.$$

The agreement, though not perfect, is satisfactory. It seems that Aryabhata's ratio  $13\frac{1}{2}/360$  was replaced by

$$\frac{13;32}{360} = 0;2,15,20.$$

The difference between 13;30 and 13;32 being very small, and three other elements of the solar motion (epoch, sidereal year and apogee) being identical with those of Aryabhata, there can be no doubt that *the Tamil solar table is based upon the theory of Aryabhata*.

Aryabhata's theory would give, as an approximation, equation (15) or

$$(17) \quad \sin(x - u) = e \sin x.$$

This equation is very useful because of its simplicity, if the *mean anomaly*  $x$  (or the time) is given. However, in Tamil astronomy, the solar longitude and hence the *true anomaly*  $u$  are considered as given. The computer of the Tamil table succeeded, in some way or other, in solving  $x$  from (17). If he had started from the geometrical epicycle theory and solved  $x$  by plane trigonometry, he would have obtained the exact formula

$$(18) \quad \sin(x - u) = e \sin u,$$

from which  $x$  can be computed without any difficulty. Instead of doing that, he started from the approximation (17) or from a corresponding table and treated that formula or table as if it were rigorously exact. If this explanation is correct, it would offer a good example of the dogmatic way in which astronomy was investigated in India ever since Brahmagupta.

#### NOTES

1. Le Gentil, Mémoire sur l'Inde, Histoire de l'Acad. royale des sciences, année 1772 (2<sup>me</sup> partie), Paris 1776, Mém. de math. et phys., pp. 169 and 221.
2. J. Warren, Kala Samkalita. A collection of memoirs on the various modes according to which the nations of Southern India divide time (1825).
3. O. Neugebauer, Tamil Astronomy. A Study in the History of Astronomy in India, Osiris 10, p. 252.

4. B. L. v. d. Waerden, Die Bewegung der Sonne nach griechischen und indischen Tafeln. Sitzungsber. Bayer. Akad. Wiss. München 1952, math.-nat. Kl., p. 219.
5. I. V. M. Krishna Rav, The Motion of the Moon in Tamil Astronomy. *Centaurus* 4 (1956), p. 198.
6. Olaf Schmidt, On the Computation of the Ahargana, *Centaurus* 2 (1953), p. 140.
7. See F. X. Kugler, *Babylonische Mondrechnung*, Freiburg 1900.
8. G. Schiaparelli, Le sfere omocentriche, *Scritti storia astronomia* II, p. 3. German translation in *Abh. Gesch. Math.* 1 (1877), p. 101. See also O. Neugebauer, On the Hippopede of Eudoxus, *Scripta math.* 19 (1953), p. 225.
9. According to Aryabhatiya I 1. there are 1 577 917 500 days in 4 320 000 years. For 1 year this gives 365;15,31,15 days. See W. E. Clark, *The Aryabhatiya of Aryabhata*, Chicago 1930.
10. J. Warren, *Kala Samkalita*, p. 118. Warren calls the Aryabhatiya "Aryasiddhanta", but the periods quoted by him from the Carnatic manuscript of the Aryasiddhanta are equal to those of our Aryabhatiya.
11. Transl. Burgess and Whitney, *J. Amer. Math. Soc.* 6 (1860), p. 205.

DIE MATHEMATISCHEN  
ARBEITEN VON JOHANN HUDDE (1628–1704)  
BÜRGERMEISTER VON AMSTERDAM

von  
Karlheinz Haas\*

*Les hommes n'ont jamais montré plus  
d'esprit que lorsqu'ils ont badiné.*

*Leibniz.*

§ 1. *Huddes Leben und Wirken.*

Der Niederländer Johann Hudde war einer der begabten Mathematiker aus der Schule Descartes unter dem verdienstvollen Lehrmeister Frans van Schooten (1615–60).

Hudde wurde am 23. Mai 1628 in Amsterdam getauft<sup>1</sup> als Sohn des Kaufmanns Gerrit Hudde und seiner Ehefrau Maria Witsen. Der junge Hudde studierte etwa vom Jahre 1648 an in Leiden die Rechte<sup>2</sup>. Um dieselbe Zeit oder auch schon früher liess er sich von Schooten in privaten Vorträgen in die Mathematik der damaligen Zeit einführen<sup>3</sup>. Dieser pflegte die Ergebnisse der mathematischen Arbeiten seiner Schüler mit in seine eigenen Schriften zu übernehmen. So finden wir in Schootens *Exercitationes mathematicae*<sup>4</sup> drei kleinere Beiträge Huddes, darunter die schon 1654 entstandene Abhandlung über die Bestimmung der grössten Breite des Descartes'schen Blattes. Ferner beteiligte sich Hudde 1657 an einer Korrespondenz<sup>5</sup> zwischen R. F. de Sluse (1622–85), Christian Huygens (1629–95) und Schooten über Fragen der Quadratur, der Tangente und des Schwerpunktes bestimmter algebraischer Kurven. Die Schootensche Ausgabe der Descartes'schen *Geometria* von 1659/61<sup>6</sup> enthält zwei weitere Arbeiten Huddes. Die erste trägt den Titel *De reductione aequationum* und dürfte nach einer Bemerkung Huddes im

\* Edingen – Heidelberg – Inaugural-Dissertation, Tübingen, 1955.

Vorwort etwa 1654/55 entstanden sein. Sie erscheint in Form eines Briefes an Schooten vom 15. VII. 1657. Die zweite, *De maximis et minimis*, ist vom 26. II. 1658 datiert. Aus dem Jahre 1663 haben wir noch einen Briefwechsel Huddes mit Huygens über Glücksspielaufgaben<sup>7</sup>. Aus den angeführten Daten geht hervor, dass alle mathematischen Arbeiten Huddes im Zeitraum von 1654 bis 1663 entstanden sind.

Von 1663 bis zum Todesjahr (1704) ist von Johann Hudde kein weiteres Zeugnis mathematischer Produktivität überliefert. In dieser Zeit wandte sich Hudde ganz der Tätigkeit im Dienste seiner Vaterstadt Amsterdam zu<sup>8</sup>. 1667 ist er Mitglied des Stadtrates, 1668 Schöffe, 1669 ausserordentlicher Schatzmeister. In diesem Amt verfasste er 1671 zusammen mit Christian Huygens einen Inspektionsbericht über Niederrhein und Ijssel<sup>9</sup>. Hudde heiratete 1673 die Witwe Debora Blaw. Aus der Ehe gingen keine Kinder hervor. Am 15. September 1672 wurde Johann Hudde durch den Statthalter Wilhelm III. zu einem der vier Bürgermeister bestimmt. Dieses Amt hatte er bis zu seinem Tode insgesamt 21 mal inne (die Amtszeit war auf je zwei von drei Jahren beschränkt). In den Jahren zwischen seiner Amtszeit als Bürgermeister war Hudde Schatzmeister und Beauftragter der Admiralität. 1678 war er Mitglied der Kommission, die einen Bericht über die Finanzen der Staaten von Holland herausbrachte, 1679 bearbeitete er als Kommissar die Angelegenheit des Johann Joachim Becher, der den Staaten eine Erfindung anbot, Gold aus dem Dünen sand zu gewinnen, und 1680 stand er an der Spitze der Kommission, die die Regulierung der Ijssel leitete. Nach dem Tode des Bürgermeisters Valkenier erhielt Hudde 1680 das »Magnifikat« zur Leitung der städtischen Politik. 1688 war er auch eingeweiht in die Vorbereitungen für Wilhelms III. Zug nach London, der diesem die englische Krone einbringen sollte, und sorgte dafür, dass die Stadt Amsterdam wohlwollende Neutralität bewahrte. In den folgenden Jahren entstanden Differenzen zwischen dem Königsstatthalter und der Stadt Amsterdam. Dabei gelang es dem Bürgermeister Joan Corver, Hudde zeitweilig aus der Gunst Wilhelms III. zu verdrängen. Trotzdem blieb Hudde bis zu seinem Tode am 15.4.1704 ein »Mann von Gewicht«. Er ist in der *Oude Kerk* in Amsterdam beigesetzt. Ein Bildnis Huddes aus dem Jahre 1686 befindet sich im Amsterdamer Reichsmuseum.

Ueber die Persönlichkeit Johann Huddes wird gesagt<sup>10</sup>:

»Als Bürgermeister kann Hudde angesehen werden als einer der besten Typen aus der letzten Zeit unseres goldenen Zeitalters. Er war uneigennützig, ehrlich, wissenschaftlich hoch gebildet und hatte einen offenen Blick für das allgemeine Interesse.«

Neben der Mathematik interessierte sich Hudde auch für Physik und Astronomie. Er pflegte Umgang mit dem Astronomen Ism. Bouillaud und berichtete 1665 an Huygens über Kometen-Beobachtungen. 1671 schickte er Sterbetafeln an Huygens<sup>11</sup>, die der Berechnung von Leibrenten dienen sollten. 1672 und 1673 musste Hudde im Auftrag der Stadt Amsterdam die Formeln de Witt's zur Berechnung von Leibrenten begutachten. 1663 beschäftigte sich Hudde mit der Herstellung von Mikroskopen mittels kugelförmiger Glaslinsen; 1665 arbeitete er zusammen mit Spinoza an der Herstellung von Fernrohrlinsen. Aus der Korrespondenz mit Spinoza geht hervor, dass Hudde auch eine *Parva dioptrica* zusammengestellt hatte<sup>12</sup>.

Die oben angeführten mathematischen Arbeiten Johann Huddes aus der Schaffensperiode von 1654 bis 1663 bilden nur einen Teil des gesamten mathematischen Werkes. Das wissen wir z. B. aus Aufzeichnungen von Leibniz, der Hudde im November 1676 in Amsterdam besucht hat und dessen Handschriften dort einsah<sup>13</sup>. In Wagenaar, *Beschreibung von Amsterdam*, III (Amst. 1767), S. 239 heisst es vom Nachlass Huddes<sup>14</sup>:

Verschiedene seiner mathematischen Schriften sind seither in den Besitz seiner Erben gelangt, doch, da er die letzte Hand nicht angelegt hatte, bis jetzt noch nicht veröffentlicht.

Hudde befasst sich in dem uns überlieferten Teil seiner mathematischen Schriften vor allem mit der Verbesserung der algebraischen Methoden. Die Anregung dazu geht unmittelbar auf Descartes zurück, der durch seine Koordinaten-Methode die Behandlung geometrischer Probleme auf die Lösung algebraischer Gleichungen zurückgeführt hatte. Huddes umfangreiche Arbeit zu diesem Thema sollte ursprünglich den Titel tragen: *De natura, reductione, determinatione, resolutione atque inventione aequationum*<sup>15</sup>.

Daneben war in jener Zeit das Tangentenproblem in den Mittelpunkt des allgemeinen Interesses getreten. Schooten hatte 1641 die diesbezüglichen Schriften Fermats in Paris eingesehen<sup>16</sup> und deren Inhalt an seine Schüler weitergegeben. Sein Hauptanliegen war die Algorithmisierung der Fermatschen Methode zur Anwendung auf algebraische Gleichungen. Hudde hat 1656 im Zusammenhang mit der Extremwertmethode eine Tangentenregel aufgestellt.

Die meisten übrigen Arbeiten Huddes stellen Anwendungen der Ergebnisse aus der Gleichungslehre bezw. der Extremwert- und Tangentenregel dar.

In der vorliegenden Arbeit sollen die beiden Briefe aus der *Geometria* das Kernstück bilden, an das sich die Ergebnisse der anderen Arbeiten anschliessen.

## § 2. Der Brief »De Reductione Aequationum«.

1. Huddes Vorbild für diese Arbeit ist das dritte Buch der Descartes'schen *Géométrie*, worin die Methoden zur Behandlung und Lösung von Gleichungen dargestellt werden. Hudde wollte ursprünglich ein Lehrbuch über dieses Thema schreiben<sup>17</sup>, wurde aber durch seine vielseitige Beschäftigung immer wieder davon abgehalten, seine Ergebnisse in vollem Umfang darzulegen. Seine Methoden stellte er in Form eines Briefes an Schooten zusammen (datiert vom 15. Juli 1657). Dieser übersetzte den niederländischen Text ins Lateinische und übernahm ihn zusammen mit dem zweiten Brief *De Maximis et Minimis* in die Ausgabe der *Geometria* von 1659.

In der Arbeit über die Reduktion von Gleichungen beschäftigt sich Hudde mit der Lösung von Gleichungen (bis zum 6. Grade). Dies war das Hauptproblem der damaligen Algebraiker. Ferrari hatte 1545 die Lösung der Gleichung 4. Grades auf die Lösung einer kubischen Gleichung zurückgeführt. Descartes hatte in der *Géométrie*<sup>18</sup> die Gleichungen 5. und 6. Grades zu einem *genre* zusammengefasst und eine Methode zur zeichnerischen Bestimmung der Wurzeln gegeben. Aus dem Inhalt der *Reductio* kann man schliessen, dass Hudde ursprünglich versucht hatte, die Gleichungen 5. und 6. Grades algebraisch zu lösen. Da er jedoch keine allgemeine Lösung fand, stellte er wenigstens die Fälle zusammen, in denen durch Abspalten eines Faktors eine Reduktion des Grades möglich ist. Entsprechend behandelte er auch die Gleichungen 3. und 4. Grades, weil deren allgemeine Lösung grosse rechnerische Schwierigkeiten bietet.

Auf den Inhalt der 21 Regeln der Arbeit eingehend, stellen wir Huddes Problem modern wie folgt dar:

Gegeben sei eine reduzible Gleichung

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n = 0,$$

$a_i$  beliebig reell,  $n \leq 6$ . Es sind sämtliche reellen Teiler zu bestimmen.

2. Vor der Behandlung dieser Aufgabe muss entschieden werden, ob die gegebene Gleichung in einem noch näher zu bestimmenden Sinne reduziert ist oder nicht. Hudde ist sich der Bedeutung dieser Frage voll bewusst<sup>19</sup>.

Die ersten beiden seiner Regeln beziehen sich auf Reduzibilitätsfragen.

*Regel 1* lautet<sup>20</sup>: Werden in einer Buchstabengleichung ein oder mehrere Buchstaben gleich Null gesetzt, ohne dass dabei das Absolutglied verschwindet, und ist die entstehende Gleichung irreduzibel, dann ist sicher auch die Ausgangsgleichung irreduzibel [Fall 1]<sup>21</sup>. Verschwindet das Absolutglied und ist die neue Gleichung irreduzibel, so kann die ursprüngliche Gleichung nicht in lauter Gleichungen zerlegt werden, deren Grad kleiner ist als der der entstandenen [Fall 2].

Hudde bringt folgendes Beispiel für den ersten Fall<sup>22</sup>:

$$\begin{array}{rcl} x^3 & - & 3axx + 2bbx - 3a^3 = 0. \\ & - & b \quad + 3ab - b^3 \\ & & + 4aa - 5aab \\ & & - 4bba \end{array}$$

Mit  $a = 0$  folgt

$$x^3 - bxx + 2bbx - b^3 = 0.$$

Diese Gleichung ist irreduzibel<sup>23</sup>, daher auch die Ausgangsgleichung.

Als Beispiel für den Fall 2 dient u. a. die Gleichung

$$x^4 - 4ax^3 + 4a^2x^2 + 2b^3x - 4ab^3 = 0.$$

Mit  $a = 0$  ergibt sich der irreduzible Bestandteil  $x^3 + 2b^3 = 0$  [eigentlich  $x(x^3 + 2b^3) = 0$ ]; die Ausgangsgleichung enthält noch den Faktor  $x - 2a$ , wie aus der Zerlegung

$$(x - 2a)(x^3 - 2ax^2 + 2b^3) = 0 \quad \text{folgt.}$$

In *Regel 2* wird *Regel 1* verallgemeinert. Jetzt treten an Stelle der  $a, b, c \dots$  Ausdrücke, die aus den  $a, b, c \dots$  rational aufgebaut sind. Entsprechendes, sagt Hudde zusätzlich, gilt auch beim Auftreten irrationaler Grössen; z. B. im folgenden Fall:

In der Gleichung<sup>24</sup> (S. 410)

$$x^5 * * + xx \sqrt{\frac{1}{4} aa + bb} + a^3b \sqrt{C \frac{1}{8} a^3 + \frac{1}{27} abb} = 0$$

setze man

$$\frac{1}{4} aa + bb = 0.$$

Das ergibt

$$x^5 * * * * + a^3b \sqrt{C \frac{25}{216} a^3} = 0.$$

Diese Gleichung ist irreduzibel, also auch die Ausgangsgleichung.

Zusätzlich bemerkt Hudde (S. 411/12), man könne nach diesem Verfahren auch entscheiden

- a. wann eine Gleichung einen vorgegebenen rationalen Teiler hat,
- b. wann sie sich als Produkt mehrerer gleicher Faktoren schreiben lässt,

- c. ob zwei oder mehrere Gleichungen einen gemeinsamen Teiler haben; besonders leicht sei die Feststellung des negativen Falles. Bei Auftreten von Brüchen müsse man gegebenenfalls (wenn der Nenner verschwinde) vorher mit dem Hauptnenner multiplizieren.

Die übrigen Regeln tragen zur Reduzibilitätsfrage nur insofern bei, als durch sie gewisse spezielle Formen von Teilern ausgeschlossen werden.

3. Jetzt wird die gegebene Gleichung als *reduzibel* angesehen. Hudde setzt die Existenz eines Teilers von einem bestimmten Grade voraus und macht einen Ansatz mit allgemeinen Koeffizienten. Durch Koeffizientenvergleich gewinnt er gewisse Ausdrücke in den  $a_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) für die Koeffizienten des Teilers. Er führt sein Verfahren bei allen möglichen Teilern durch und stellt die gewonnenen Ausdrücke in Tabellen zusammen, die er bei Behandlung spezieller Probleme benutzt. Hudde gibt nur Ergebnisse, d. h. die Formeln, nicht aber die Herleitung<sup>25</sup>. Seine Ausdrücke lassen sich von Fall zu Fall in der geschilderten Weise nachkonstruieren.

Hudde löst die Aufgabe nicht in voller Allgemeinheit. Die sich ergebenden Ausdrücke für die Teiler sind zu unübersichtlich; daher macht Hudde weitere vereinfachende Voraussetzungen:

- a) Ein Koeffizient des Teilers ist bekannt. (Regel 9).
- b) Die vorgelegte reelle Gleichung hat unvollständige Teiler, d. h. Teiler, in denen mindestens eine Potenz der Unbekannten fehlt. (Regel 11).
- c) Die gegebene Gleichung hat ganze Koeffizienten, auch die gesuchten Teiler sind ganzrational. (Regel 17).  
Die gegebene Gleichung und ihre Teiler haben ganzrationale Absolutglieder. (Regel 18).
- d) Die Gleichung zerfällt in zwei Faktoren. Der eine Faktor enthält einen Buchstaben, den anderen Faktor nicht teilt. (Regeln 3–8).
- e) Die gegebene Gleichung ist rational und hat Teiler der Form  $x^n + a^n = 0$ ,  $a$  ganz. (Regel 12–16).

Die restlichen Regeln (10, 19, 20, 21) enthalten andere Gedanken und werden daher gesondert dargestellt.

a) *Regel 9*<sup>26</sup> lehrt, wie jede numerische oder literale Gleichung reduziert werden kann, wenn ein Koeffizient eines Teilers gegeben ist.

Hudde demonstriert das Verfahren an drei Beispielen. Wir beschränken uns auf das erste. (S. 426/27).

$$\text{Die Gleichung} \quad x^5 - 4x^4 + 4x^3 + 1\frac{1}{2}xx - 7x - 3 = 0$$

habe den Teiler  $xx + yx - 2 = 0$ . Wie sieht die Zerlegung aus? Setzt man die Werte für  $x^2, x^3$ , usw. aus dem Teiler in die Ausgangsgleichung ein, so entsteht

$$y^4 + 4y^3 + 10y^2 + 14\frac{1}{2}y + 5 \text{ in } x, -2y^3 - 8yy - 16y - 16 = 0^{27}.$$

Ist diese Gleichung identisch in  $x$  erfüllt, dann liefert sie

$$y^4 + 4y^3 + 10yy + 14\frac{1}{2}y + 5 = 0 \text{ und } y^3 + 4yy + 8y + 8 = 0.$$

Der grösste gemeinsame Teiler<sup>28</sup> dieser beiden Gleichungen ist

$$y + 2 = 0;$$

folglich

$$x^5 - 4x^4 + 4x^3 + 1\frac{1}{2}xx - 7x - 3 \equiv (xx - 2x - 2)(x^3 - 2xx + 2x + 1\frac{1}{2}) = 0.$$

Dieses Beispiel zeigt deutlich, wie Hudde i. a. vorgeht. Ergänzend wird auch der schon von Descartes verwendete Koeffizientenvergleich erwähnt<sup>29</sup>.

b) Das geschilderte Verfahren wird auch in Regel 11<sup>30</sup> verwendet. Diese lehrt die Zerfällung von numerischen und literalen Gleichungen in zwei Polynomfaktoren, denen ein oder mehrere Glieder fehlen.

Hudde beginnt mit der Normalform<sup>31</sup> der Gleichung 6. Grades

$$[x^6 + px^5 + qx^4 + rx^3 + sx^2 + tx + u = 0].$$

Nun folgen die möglichen Teiler in Tabellenform.

Fall 1: Die Gleichung enthält einen Linearfaktor und einen unvollständigen Kofaktor. (S. 440/43).

- 2: Die Gleichung enthält einen Faktor der Form  $x^k + a = 0$ ;  $a \neq 0$ ,  $k = 2, 3 \dots, 6$ . (S. 443/46).
- 3: Die Gleichung (5. Grades) enthält einen Faktor  $x^2 + ax + b = 0$ ;  $a, b \neq 0$ . (S. 446/49).
- 4: Die Gleichung (6. Grades) enthält einen Faktor  $x^2 + ax + b = 0$ ;  $a, b \neq 0$ . (S. 449/54).
- 5: Die Gleichung (6. Grades) enthält einen Faktor  $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ , wobei  $a = 0$  oder  $b = 0$  und  $c \neq 0$ . (S. 455/58).

(Die Kofaktoren in den Fällen 2 und 3 sollen unvollständig sein).

Die Gleichungen werden dem Grade nach behandelt.

Wir bringen aus Fall 2 die Formeln für die Gleichungen 4. Grades: (S. 443).

- 1)  $x^4, px^3, qx^2, rx, s = 0$ , teilbar durch  $x^2 + \frac{r}{p} = 0$ , identisch mit<sup>32</sup>

$$x^2 + \frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - s} = 0.$$

- 2)  $x^4, px^3, *, rx, s = 0$ , teilbar durch  $x^2 + \frac{r}{p} = 0$ , identisch mit  $x^2 \pm \sqrt{-s} = 0$ .

- 3)  $x^4, *, qx^2, *, s = 0$ , teilbar durch  $x^2 + \frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - s} = 0$ .

- 4)  $x^4, *, *, *, s = 0$ , teilbar durch  $x^2 \pm \sqrt{-s} = 0$ .

Wir können diese Fälle leicht nachkonstruieren, wenn wir  $x^2 = -c$  in die linke Gleichung einsetzen. Das ergibt

- 1)  $c^2 - cq + s = 0$  und  $cp - r = 0$ .
- 2)  $c^2 + s = 0$  und  $cp - r = 0$ .
- 3)  $c^2 - cq + s = 0$ .
- 4)  $c^2 + s = 0$ .

Hudde gibt in Fall 2 bei Teilern der Form  $x^2 + c = 0$  insgesamt eine Formel für Gleichungen 3. Grades, 4 Formeln für Gleichungen 4. Grades (oben angeführt), 9 Formeln für Gleichungen 5. Grades und 20 Formeln für Gleichungen 6. Grades. Damit hat er alle möglichen Fälle erfasst.

Dazu kommen 1 + 2 + 8 Formeln für Teiler der Form  $x^3 + c = 0$ , 1 + 2 Formeln für Teiler der Form  $x^4 + c = 0$  und eine Formel für einen Teiler der Form  $x^5 + c = 0$ . Manche dieser Formeln treten schon in den vorhergehenden Fällen 1 und 2 auf.

Anwendungsbeispiel zu Fall 1: Es ist festzustellen, ob die Gleichung

$$x^6 - x^3 \sqrt[3]{3} - 2\frac{1}{3}x + 10\frac{1}{3} = 0$$

einen Linearfaktor enthält. (S. 448).

Die Gleichung entspricht der »Normalform«  $x^6, sx^2, tx, v = 0$ .

Der Linearfaktor kann sein:  $x + \frac{v}{t} = 0$ , identisch  $x - \frac{st^{2/3}}{v^2} = 0$ , identisch  $x \pm \frac{t}{v} \sqrt[3]{-s} = 0$ , identisch  $x \pm \sqrt[4]{-s} = 0$ , identisch  $x - \sqrt[3]{\frac{st}{v}} = 0$ .

Dies ist nicht möglich; z. B. ist  $\frac{v}{t} = \frac{81}{20}$  rational, aber  $\sqrt[4]{-s} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{3}}$  irrational.

Hudde will mit dem Beispiel zeigen, wie einfach die Anwendung seiner Formeln ist.

Die Fälle 4 und 5 sind wegen der Vielzahl der möglichen Gleichungsformen ziemlich umfangreich. Durch geschickt zusammenfassende Darstellung kann Hudde trotzdem die Uebersicht wahren<sup>34</sup>.

Regel 11 gilt für Gleichungen mit *beliebigen* reellen Koeffizienten und unvollständigem Teiler. Diese Einschränkung kann wegfallen bei Gleichungen mit *ganzen* Koeffizienten. Damit kommen wir zu

c) *Regel 17*: Die gegebene Gleichung ist ganzrational normiert und hat *vollständige rationale normierte Teiler*<sup>35</sup>.

Die Gleichungen 4. und 5. Grades sind also auf vollständige Teiler 2. Grades zu untersuchen, die Gleichung 6. Grades auf vollständige Teiler 2. und 3. Grades.

Hat z. B. (S. 470) die vollständige Gleichung

$$x^4 + px^2 + qx^2 + rx + s = 0$$

einen vollständigen rationalen Teiler 2. Grades, so heisst dieser<sup>36</sup>

$$x^2 + \frac{r - hp}{\frac{s}{h} - h} x + h = 0, \text{ wenn } h^2 \neq s,$$

bezw.  $x^2 + \left( \frac{\frac{p}{2}}{\frac{s}{h} - h} + \left[ \frac{\frac{p^2}{4} + 2h - q}{\frac{s}{h} - h} \right] \right) x + h = 0, \text{ wenn } h^2 = s.$

Die Gleichungen 5. und 6. Grades bieten nichts Neues, nur die Formeln sind komplizierter<sup>37</sup>.

Je weniger Teiler das Absolutglied enthält, desto einfacher ist die praktische Anwendung der Regel. Hudde erhält (S. 479/81) durch Einführen einer neuen Unbekannten  $z = x + c$  ( $c$  geeignete Konstante) eine neue Gleichung, deren Absolutglied weniger Teiler hat.

Ist eine literale Gleichung gegeben, so darf man sie als homogen in den vorkommenden Buchstaben-Grössen voraussetzen<sup>38</sup>. Jetzt treten nur Teiler auf, deren Grad dem Grad eines möglichen Teilers des Absolutgliedes entspricht.

*Regel 18* erweitert *Regel 17*. Hudde setzt nur die Absolutglieder der Gleichung und ihrer Teiler als *ganz* voraus. Die Formeln der *Regel 17* gelten auch hier. (S. 483).

d) Eine literale Gleichung zerfällt in zwei Faktoren. Der eine Faktor enthält einen Buchstaben, der den anderen Faktor nicht teilt. (*Regel 3–8*)<sup>39</sup>.

Hudde geht in seiner Darstellung von speziellen Fällen zum allgemeinen Fall über.

*Regel 3*: Der Buchstabe kommt in verschiedenen Gliedern des Teilers nur in verschiedenen Potenzen vor<sup>39</sup>.

*Regel 4*: Der Buchstabe erscheint in verschiedenen Gliedern des Teilers in gleicher Potenz, jedoch kommt eine dieser Potenzen nur *einmal* vor<sup>40</sup>.

*Regel 5* enthält *keine* einschränkenden Voraussetzungen, umfasst also die beiden vorhergehenden<sup>41</sup>.

Die Regeln 6, 7 und 8 entsprechen den vorhergehenden 3, 4 und 5, jedoch steht »irrationaler Ausdruck« für »Buchstabe«. (S. 421/26).

Demgemäss erklärt Hudde sein Verfahren nur bei den Regeln 3, 4, und 5:

In *Regel 3* und *4* setzt er die Summe aller Glieder Null, die einen Ausdruck zum Faktor haben. Dann prüft er, ob sich die vorliegende Gleichung durch die erhaltene Summe dividieren lässt. Bei *Regel 3* (und *6*) genügt die Prüfung mit nur *einer* Potenz jedes möglichen Ausdrucks. In *Regel 4* (und *7*) müssen *alle* Potenzen untersucht werden. In *Regel 5* (und *8*) setzt er eine passende Grösse gleich Null und prüft, ob die resultierende Gleichung mit der ursprünglichen einen gemeinsamen Teiler hat.

Wir bringen Huddes Erläuterungsbeispiel zu Regel 4: (S. 419).

$$\begin{aligned} \text{In der Gleichung } x^4 - ax^3 + \frac{1}{2}aaxx - \frac{1}{4}aabbx - \frac{1}{8}aabb &= 0 \\ -\frac{1}{8}b &+ \frac{1}{2}ab - \frac{1}{4}abb - \frac{1}{4}ab^3 \\ &- \frac{1}{4}bb \end{aligned}$$

werden zuerst die Glieder mit  $a$  allein zusammengefasst:

$$-x^3 + \frac{1}{2}bxx - \frac{1}{4}bbx - \frac{1}{4}b^3$$

ist *kein* Teiler der Gleichung. Die Glieder mit  $a^3$  führen auf

$$xx - \frac{1}{8}bx - \frac{1}{4}bb.$$

Dieser Ausdruck *teilt* die Ausgangsgleichung.

e) Auch die Regeln 12 bis 16 stehen in innerem Zusammenhang. Sie geben an, unter welchen Bedingungen eine rationale Gleichung durch  $x^n + a^n$  ( $n = 1, 2, \dots, 5$ ) teilbar ist und wie die Konstante  $a$  gefunden werden kann.

*Regel 12* lautet<sup>42</sup>: Tritt in einer Gleichung eine bestimmte Buchstabenpotenz nur einmal auf und ist diese im Absolutglied *nicht* enthalten, dann hat die Gleichung keinen Teiler der Form  $x^k \pm a^k$ .

*Regel 13* besagt: Die Gleichung hat keinen Teiler der Form  $x^k \pm a^k$ , wenn ein Buchstabe nur als Koeffizient (einschliesslich des Vorzeichens) bei Gliedern gerader oder ungerader Potenzen von  $x$  auftritt und im Absolutglied nicht enthalten ist. (S. 459).

*Regel 14*: Ist eine Buchstabenpotenz  $c^p$  nur im Absolutglied einer Gleichung  $n$ -ten Grades enthalten, so hat die Gleichung keinen Teiler der Form  $x \pm a$ , wenn  $p < n$ , und keinen Teiler der Form  $x^k \pm a^k$ , wenn  $kp < n$ . (S. 459/60).

Die ohne Beispiele angegebenen Regeln 13 und 14 sind *hinreichend*; das lehrt der Ansatz in unbestimmten Koeffizienten.

*Regel 15* lehrt, wie ein vorhandener Teiler der Form  $x^k \pm a^k$  gefunden wird: (S. 460/61). Man suche einen Buchstaben-Koeffizienten, der im Absolutglied nicht enthalten ist. Dann setze man die Summe aller mit der nämlichen Potenz dieses Buchstabens behafteten Glieder gleich Null. Der g. g. T. der neuen und ursprünglichen Gleichung ist der Teiler.

Die Regeln 12 bis 15 lassen sich ersetzen durch die allgemeine Methode der

*Regel 16*<sup>43</sup>: Hat eine homogene Gleichung den Teiler  $x^k \pm a^k$ , so teilt  $a^k$  das Absolutglied.

Um sich die nötigen Zerlegungsproben zu erleichtern, ersetzt Hudde  $x$  durch einen zweckmässig gewählten Wert  $c$ . Der nunmehr auf der linken

Gleichungsseite stehende Ausdruck muss den Teiler  $c^k \pm a^k$  enthalten. Werden die Teiler des Ausdruckes je um  $c^k$  vermindert, so stimmt mindestens *eine* dieser Differenzen mit dem gesuchten Teiler überein. Das Verfahren erfordert gegebenenfalls die Verwendung von mehreren  $c$ -Werten.

Huddes Beispiel: (S. 466/67).

$$\text{Mit } x = 21a \text{ wird } x^3 - 21ax^2 - b^2x + 20a^2x + 20ab^2 = 0$$

$$\text{zu } a(420a^2 - b^2) = 0.$$

Das Produkt hat die Teiler  $\pm a$ ;  $\pm(420a^2 - b^2)$ . Nach Subtraktion von  $21a$  bzw.  $(21a)^2$  entsteht

$$-20a; -22a; -21a^2 - b^2; -861a^2 + b^2.$$

Von diesen Ausdrücken teilt nur der erste das Absolutglied. Folglich ist  $x - 20a$  der einzig mögliche Teiler der Ausgangsgleichung.

4. In den Regeln 10, 19, 20 und 21 geht Hudde methodisch neue Wege.

*Regel 10*<sup>44</sup> enthält die *Doppelwurzelmethode*. Sie lehrt, wie man mehrfache Wurzeln einer Gleichung bestimmen kann. Hudde gibt hier nur das *Verfahren*. Ein *Beweis* steht in der Abhandlung *De Maximis et Minimis*, wo die Methode zur Bestimmung von Extremwerten angewandt wird. (Siehe dort).

*Regel 19* (S. 486/94) ist aus dem Streben Huddes nach einer gemeinsamen Auflösung der Gleichungen 5. und 6. Grades durch Radikale hervorgegangen. Sie lehrt<sup>45</sup>, wie jede ganz rationale Gleichung reduziert werden kann, in der das zweithöchste Glied fehlt<sup>46</sup> und bei deren Teiler der zweithöchste Koeffizient ganz ist. Wegen der zusätzlichen Einschränkung werden die auftretenden Resolventen ganzzahlig lösbar.

Das Verfahren wird demonstriert an der allgemeinen Gleichung 6. Grades

$$x^6 + qx^4 + rx^3 + sx^2 + tx + v = 0.$$

Die Gleichung soll einen Teiler zweiten Grades mit ganzem Koeffizienten des linearen Gliedes haben.

Hudde macht den Ansatz

$$x^6 + qx^4 + rx^3 + sx^2 + tx + v = (x^4 - yx^3 + zx^2 + kx + l)(x^2 + yx + w)$$

und gewinnt durch Koeffizientenvergleich 5 neue Gleichungen in den Unbekannten  $y, z, w, k, l$ . Aus diesen findet er durch sukzessive Elimination eine Gleichung 15. Grades für  $y$  und eine lineare Gleichung für  $w$ <sup>47</sup>. Da  $y$  ganz sein sollte, folgt es durch Probieren.

Das Entsprechende mit einem Teiler 3. Grades führt Hudde *nicht* vor. Er gibt nur an, dass eine Resolvente 20. Grades auftritt.

Die Resolvente für die Gleichung 5. Grades mit quadratischem Teiler folgt aus der für die Gleichung 6. Grades mit  $v = l = 0$ , jene für die Gleichung 4. Grades mit  $k = l = t = v = 0$ . Sie lautet

$$y^6 + 2qy^4 + q^2y^2 - 4sy^2 - r^2 = 0.$$

Es ist dieselbe, die Descartes in der *Géométrie* 1637 ohne Beweis angegeben hat<sup>48</sup>. Wahrscheinlich hat Hudde zuerst die Descartes'sche Resolvente hergeleitet und dann versucht, auf demselben Wege fortschreitend auch die Gleichungen 5. und 6. Grades zu lösen.

Hudde bestimmt die Resolvente für die biquadratische Gleichung aus

$$x^4 + qx^2 + rx + s \equiv (x^2 - yx + z)(x^2 + yx + w).$$

Der Koeffizientenvergleich liefert

$$(1) \quad q = -y^2 + z + w,$$

$$(2) \quad r = -yw + yz,$$

$$(3) \quad s = wz.$$

Die Resolvente entsteht durch Entfernen von  $w$  und  $z$ .

Die Teiler der Ausgangsgleichung in der Descartes'schen Form

$$x^2 + yx + \frac{1}{2}q + \frac{1}{2}y^2 - \frac{r}{2y} = 0,$$

$$x^2 - yx + \frac{1}{2}q + \frac{1}{2}y^2 + \frac{r}{2y} = 0$$

ergeben sich durch Auflösen von (1) und (2) nach  $z$  und  $w$ .

Anschliessend sagt Hudde, Descartes habe seine Formeln wohl auf demselben Wege gefunden und nicht von anderen Autoren übernommen, »wie einige meinen«<sup>49</sup>. Hudde dürfte sich geirrt haben; denn das Lösungsverfahren Ferraris (von Cardano 1545 an passend gewählten Beispielen auseinandergesetzt) führt unmittelbar zur Descartes'schen Resolvente<sup>50</sup>.

Vor Anwendung der Descartes'schen Formeln zur Lösung der biquadratischen Gleichung muss der Koeffizient von  $x^3$  zu Null gemacht werden. Hudde gibt in *Regel 20*<sup>51</sup> die Resolvente für die *allgemeine* Gleichung 4. Grades, in der das Glied mit  $x^3$  *nicht* fehlt, in der Form:

$$y^4 - qy^2 + (pr - 4s)y - sp^2 + 4qs - r^2 = 0.$$

Jetzt hat die Ausgangsgleichung:

$$x^4 + px^2 + qx^2 + rx + s = 0$$

die Faktoren

$$x^3 + \left( \frac{1}{2}p + \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q + y} \right)x + \frac{1}{2}y + \frac{\frac{1}{2}yp - r}{2\sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q + y}} = 0$$

und

$$x^2 + \left( \frac{1}{2}p - \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q + y} \right)x + \frac{1}{2}y - \frac{\frac{1}{2}yp - r}{2\sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q + y}} = 0.$$

Hudde dürfte als erster die Lösung der *allgemeinen* Gleichung 4. Grades angegeben haben.

Der im Original fehlende Beweis wäre etwa so zu ergänzen:

Ansatz:

$$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s \equiv (x^2 + z_1x + w_1)(x^2 + z_2x + w_2).$$

Durch Koeffizientenvergleich

$$(1) \quad p = z_1 + z_2,$$

$$(2) \quad q = z_1z_2 + w_1 + w_2,$$

$$(3) \quad r = z_1w_2 + z_2w_1,$$

$$(4) \quad s = w_1w_2.$$

Mit

$$(5) \quad y = w_1 + w_2$$

folgt

$$\left\{ \begin{array}{l} q - y = z_1z_2, \\ r - yz_1 = (z_2 - z_1)w_1, \\ r - yz_2 = (z_1 - z_2)w_2 \end{array} \right\},$$

und

$$\begin{aligned} r^2 - ry(z_1 + z_2) + y^2z_1z_2 &\equiv (r - yz_1)(r - yz_2) = -(z_1 - z_2)^2 w_1w_2 \\ &\equiv [4z_1z_2 - (z_1 + z_2)^2] w_1w_2. \end{aligned}$$

Die gesuchte Resolvente entsteht nun durch Entfernen von  $z_1 + z_2$ ,  $z_1z_2$  und  $w_1w_2$ . Zudem sind  $z_1$  und  $z_2$  die Lösungen der Gleichung

$$z^2 - pz + q - y = 0; \text{ also } z_{1,2} = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q + y}.$$

Ferner sind  $w_1$  und  $w_2$  die Lösungen der Gleichung

$$w^2 - wy + s = 0; \text{ also } w_{1,2} = \frac{y}{2} \pm \sqrt{\frac{y^2}{4} - s}.$$

Aus der Resolventengleichung folgt schliesslich

$$\frac{y^3}{4} - s = \left( \frac{1}{2}py - r \right)_1^3 : 4 \left( \frac{1}{4}p^2 - q + y \right), \text{ usw.}$$

In *Regel 21* (S. 496/99) empfiehlt Hudde besondere Kunstgriffe, um eine Buchstabengleichung zu zerlegen, wenn ein Buchstabe in möglichst niedriger Dimension auftritt. In zweien seiner Erläuterungsbeispiele

findet er Faktoren durch Umstellen<sup>62</sup>, im dritten durch Auflösen nach einem nur quadratisch auftretenden Buchstaben<sup>63</sup>. Er sieht die individuelle Behandlung des Einzelfalles als das wirksamste Reduktionsmittel an.

Nun folgt die Lösung der Gleichung dritten Grades (S. 499) aus

$$x^3 = qx + r.$$

Der lösende Ansatz  $x = y + z$

wird noch heute nach Hudde benannt<sup>64</sup>.

Abschliessend sagt Hudde, er habe wohl noch einige weitere Regeln bereit, wolle sie aber lieber für die Zukunft aufsparen<sup>65</sup>. Unter diesen Regeln sei

eine, durch die er alle irrationalen Wurzeln von numerischen wie von literalen Gleichungen finde,

eine, wodurch er alle numerischen Gleichungen zerlege, die als Produkt zweier rationaler Gleichungen geschrieben werden können. Hierzu brauche man die Teiler des Absolutgliedes nicht zu kennen. Ferner habe er eine Regel, womit er häufig *literale* Gleichungen reduziere. Sie bestehe darin, dass man passende Grössen gleich Null setze und das Ergebnis reduziere.

Nun folgt zusätzlich noch eine weitere Regel (S. 503/04). Eine Zerlegung einer reduzierten ganzrationalen Buchstabengleichung  $n$ -ten Grades lässt sich finden, wenn man durch passendes Verfügen über die Buchstaben eine irreduzible ganzrationale Gleichung  $(n - 1)$ ten Grades erhält.

Z. B. geht die kubische Gleichung

$$x^3 - 5ax^2 + (6b^2 - 9bc + 9a^2)x - 18ab^2 - 9a^3 + 27abc = 0$$

mit  $a = 0$  nach Abspalten des Faktors  $x$  in die irreduzible quadratische Gleichung

$$x^2 + 6b^2 - 9bc = 0 \quad \text{über.}$$

Das absolute Glied der kubischen Gleichung enthält die Buchstabensummanden  $-18ab^2$ ,  $-9a^3$  und  $-27abc$ ; das absolute Glied der quadratischen Gleichung enthält die Buchstabensummanden  $6b^2$  und  $-9bc$ . Hudde behauptet nun: Wenn der Quotient aus einem Buchstabensummanden im absoluten Glied der kubischen Gleichung und aus einem Buchstabensummanden im absoluten Glied der quadratischen Gleichung den bruchfreien Wert  $c$  hat, dann ist  $x + c$  Teiler der kubischen Gleichung.

In unserem Falle ist

$$\frac{-18b^2a}{6b^2} = \frac{27abc}{-9bc} = -3a.$$

Also ist  $x - 3a$  Teiler der Ausgangsgleichung.

Hudde sieht diese Regel als allgemein (für jedes  $n$ ) an, gibt jedoch keinen Beweis. Er behauptet, die Regel sei auch zur Auflösung der (allgemeinen) kubischen Gleichung tauglich<sup>56</sup>.

Abschliessend folgt eine kurze Uebersicht über die zweckmässige Verwendung der angeführten Regeln mit Hinweis auf die Anwendung bei Behandlung der regelmässigen Vielecke im Kreis<sup>57</sup>.

5. In vielen der 21 Regeln soll der g. g. T. zweier Polynome bestimmt werden. Hudde hat dazu eine eigene Methode entwickelt, die man als *Eliminationsmethode* bezeichnen kann<sup>58</sup>.

Er entwickelt sein Verfahren u. a. am folgenden Beispiel:

Gegeben seien die Gleichungen

$$[g(x) \equiv] \quad x^4 - 4ax^3 + 11a^2x^2 - 20a^3x + 12a^4 = 0;$$

$$[h(x) \equiv] \quad x^4 - 3ax^3 + 12a^2x^2 - 16a^3x + 24a^4 = 0.$$

Hudde schreibt um in die Form  $x^4 = \dots\dots\dots$  und erhält durch Subtraktion

$$[ar_1(x) \equiv] \quad ax^3 + a^2x^2 + 4a^3x + 12a^4 = 0;$$

daraus

$$x^3 = -ax^2 - 4a^2x - 12a^3.$$

Wird dieser Ausdruck für  $x^3$  in die Ausgangsgleichung für  $g(x)$  eingesetzt, so folgt

$$[r_2(x) \equiv] \quad x^2 - ax + 6a^2 = 0.$$

Wird der hieraus folgende Ausdruck für  $x^2$  in die vorhergehende Gleichung für  $r_1(x)$  eingesetzt, so verschwindet diese identisch, d. h.  $x^2 - ax + 6a^2$  ist der g. g. T. der Ausgangsgleichungen.

Huddes Methode ist genau der Euklidische Algorithmus; denn unter Verwendung der Ausdrücke in den eckigen Klammern lässt sich sein Verfahren wie folgt darstellen:

$$h(x) = g(x) + ar_1(x),$$

$$g(x) = (x - 5a) r_1(x) + 12a^2 r_2(x),$$

$$r_1(x) = (x + 2a) r_2(x).$$

Hudde umgeht nur die Division.

Bei Gleichungen, die aus einem geometrischen Problem hervorgehen, tritt die Unbekannte  $x$  gelegentlich unter einem Wurzelzeichen auf. Um auch solche Gleichungen nach den bisherigen Methoden behandeln zu können, muss man die Irrationalitäten entfernen. Das wird durch fortgesetztes Potenzieren erreicht. Hudde führt sein Verfahren<sup>59</sup> an einer Gleichung mit 6 Quadratwurzeln<sup>60</sup> und einer mit drei Kubikwurzeln<sup>61</sup> vor und betont die Allgemeingültigkeit seiner Methode<sup>62</sup>.

## § 3. Hudde's Extremwert- und Tangentenregel.

Hudde hatte durch Schooten die Extremwert- und Tangentenmethode Fermats kennengelernt<sup>63</sup>. Fermat geht – um alles kurz in moderner Fassung auszudrücken – bei seinen Ueberlegungen davon aus, dass in der Nähe einer Extremwertstelle  $x_0$  der Funktion  $f(x)$  ungefähr  $f(x_0 + h) \approx \approx f(x_0 - h)$  ist. Bei Entwicklung nach Potenzen von  $h$  muss daher das lineare Glied wegfallen<sup>64</sup>. Für eine bei  $x_0$  verschwindende rationale Funktion heisst das, dass  $x_0$  mindestens Doppelnullstelle ist. Fermats Regel ist so allgemein gehalten, dass sie für jede zweimal differenzierbare Funktion gültig bleibt. Hudde (und Huygens) suchten nach einer algorithmisch brauchbaren Regel für *rationale* Funktionen. Diese Beschränkung ist die Folge der Descartes'schen Unterscheidung zwischen Präzisionsmathematik und Approximationsmathematik<sup>65</sup>. Nur die algebraisch beherrschbaren Probleme zählen nach Descartes zur Präzisionsmathematik.

Hudde setzt voraus, dass die algebraische Bestimmungsgleichung des Problems an der Extremwertstelle eine *Doppelwurzel* besitzt. Seine *Doppelwurzelmethode* lautet so<sup>66</sup>:

Eine Gleichung mit Doppelwurzel werde gliedweise mit aufeinanderfolgenden Gliedern einer arithmetischen Folge multipliziert und die Summe der entstehenden Ausdrücke gleich Null gesetzt. Dann sind die gemeinsamen Lösungen der resultierenden und der ursprünglichen Gleichung die Doppelwurzeln der ursprünglichen und die Nullstellen des g. g. T. dieser beiden Gleichungen.

Zum Beweis<sup>67</sup> betrachtet Hudde die Gleichung 5. Grades

$$(x^5 + px^3 + qx + r)(x^2 - 2xy + y^2) = 0$$

mit der zweifachen Wurzel  $x = y$ .

Er multipliziert den zweiten Faktor  $(x^2 - 2yx + y^2)$  gliedweise mit den Gliedern der arithmetischen Folge  $a, a + b, a + 2b$ .

Auch die Summe

$$ax^2 - (a + b)2xy + (a + 2b)y^2$$

wird für  $x = y$  zu Null. (S. 507/08).

Nach dieser Vorbereitung rechnet Hudde in der Gleichung 5. Grades aus und ordnet nach Potenzen von  $x$ :

$$\begin{aligned} (x^5 + px^3 + qx + r)(x^2 - 2xy + y^2) &= x^5 - 2yx^4 + y^5x^3 \\ &\quad + px^4 - 2pyx^3 + py^2x^2 \\ &\quad + qx^3 - 2qyx^2 + qy^2x \\ &\quad + rx^2 - 2ryx + ry^2. \\ \hline a, (a + b), (a + 2b), (a + 3b), (a + 4b), (a + 5b) \end{aligned}$$

Wird hier jede Potenz von  $x$  mit dem daruntergeschriebenen Glied der arithmetischen Folge multipliziert, so steht in jeder Zeile ein Ausdruck der Form  $kx^p (x^2 - 2xy + y^2)$ , gliedweise multipliziert mit drei aufeinanderfolgenden Gliedern einer arithmetischen Folge. Jeder dieser Ausdrücke hat also die (einfache) Nullstelle  $y = x$ . Damit ist die Behauptung für die vorgelegte Gleichung 5. Grades bewiesen. Ersichtlich gilt ein entsprechender Beweis für Gleichungen *beliebigen* Grades. (S. 508/09).

Enthält eine Gleichung  $k$  gleiche Wurzeln ( $k > 2$ ), dann führt  $(k - 1)$ -malige Multiplikation mit den Gliedern einer arithmetischen Folge zu  $k$  verschiedenen Gleichungen mit der nämlichen Wurzel. Der g. g. T. dieser Gleichungen liefert die fraglichen Wurzelwerte. (S. 509).

Das Verfahren wird komplizierter, wenn die zu untersuchenden Ausdrücke *gebrochen rational* sind. Huddes *allgemeine* Methode<sup>68</sup> kommt auf den Ansatz

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \text{hinaus.}$$

Hudde setzt z. B. (S. 511/12)

$$\frac{2ba^2x + a^2x^2 - bx^3}{ba^2 + x^3} = z \quad (\text{Extremwert})$$

und multipliziert aus:  $2ba^2x + a^2x^2 - bx^3 = ba^2z + x^3z$ .

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Nun wird} & - & (b + z)x^3 & + & a^2x^2 & + & 2ba^2x - ba^2z = 0 \\ & & 3 & & 2 & & 1 \quad 0 \end{array}$$

gliedweise mit der darunterstehenden arithmetischen Folge multipliziert.

$$\text{Ergebnis:} \quad -3(b + z)x^3 + 2a^2x^2 + 2ba^2x = 0.$$

$$\text{Daraus folgt} \quad z = \frac{-3bx^3 + 2a^2x^2 + 2ba^2x}{3x^3} = \frac{2ba^2x + a^2x^2 - bx^3}{ba^2 + x^3} \text{ usw.}$$

Ersichtlich gilt das Verfahren allgemein für *beliebige* Ausdrücke der Form  $\frac{f(x)}{g'(x)}$ .

Hudde bemerkt zu diesem Beispiel, man müsse nicht gerade mit der Folge 3, 2, 1, 0 multiplizieren; z. B. führe die Folge 0, 1, 2, 3 auf  $z = \frac{x^2 + 4abx}{3b}$ , jedoch auf die nämliche Gleichung für  $x$ .

Die *Art* des Extremis kann Hudde mit seiner Methode *nicht* entscheiden; das muss jeweils aus der Aufgabe *direkt* entnommen werden.

Als Anwendungsbeispiel erwähnt Hudde die Bestimmung der grössten Breite des Cartesischen Blattes, die er seinerzeit durchgeführt habe<sup>69</sup>. Sie ist in Schootens *Exercitationes mathematicae*, Leiden 1657, Buch V, *Miscellanae, sectio XXV und XXVI* gedruckt<sup>70</sup>.

Hier handelt es sich um die Kurve  $x^3 + y^3 = nxy$  ( $n = \text{const.}$ ). Sie ist symmetrisch zur Winkelhalbierenden des ersten und dritten Quadranten. Gesucht ist der grösste Durchmesser senkrecht zur Winkelhalbierenden.

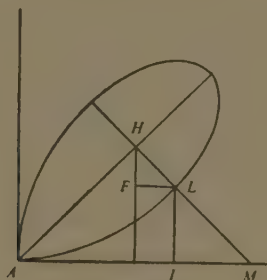


Abb. 1.

Hudde setzt (siehe Abb. 1)

$$AI = x, IL = y, AM = z; FH = s = \frac{1}{2}z - y.$$

Aus den drei Gleichungen

$$x^3 - nxy + y^3 = 0, \quad z = x + y, \quad s = \frac{1}{2}z - y$$

folgt  $s$  als Funktion von  $z$ :

$$s^3 = -\frac{1}{4}z^3 - \frac{n}{4}z^2 \quad [= \text{Maximum}].$$

Der Ansatz

$$\frac{1}{4}z^3 - \frac{n}{4}z^2 + 3s^2z + ns^2 = 0$$

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| 3 | 2 | 1 | 0 |
|---|---|---|---|

ergibt

$$\frac{3}{4}z^3 - \frac{n}{2}z^2 + 3s^2z = 0$$

oder

$$s^2 = \frac{n}{6}z - \frac{1}{4}z^2.$$

Nach Einsetzen in die Ausgangsgleichung folgt

$$z^3 = \frac{1}{3}n^3, \text{ und weil } AH^3 = \frac{1}{2}z^3 \text{ ist, wird } AH = \sqrt[3]{\frac{n^3}{6}}.$$

Eine weitere Anwendung der Extremwert-Regel steht in der *Geometria*, S. 255<sup>71</sup>. An dieser Stelle wird der Zusammenhang mit der Fermatschen Methode sehr deutlich. Schooten sucht die Normale in einem Punkte der *Conchoide*. Er bespricht zuerst die Konstruktion nach Descartes<sup>72</sup>, dann die nach Fermat<sup>73</sup>.

Schooten geht im Sinne Fermats vor: Es sei  $Z$  das Zentrum,  $C$  ein Punkt der Conchoide und  $P$  der Schnittpunkt der Normalen in  $C$  mit der Achse. Bei festem  $P$  muss  $CP$  ein Minimum werden.

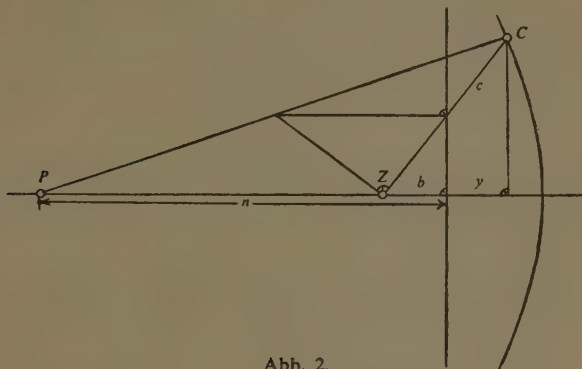


Abb. 2.

Unter Verwendung der in Abb. 2 eingezeichneten Stücke gilt

$$PC^2 = \frac{b^2c^2}{y^2} + \frac{2bc^2}{y} + c^2 - b^2 - 2by + n^2 + 2ny. \quad (A)$$

Schooten<sup>74</sup> führt in diese Gleichung  $y + e$  anstelle von  $y$  ein. Er setzt beide Gleichungen gleich, ordnet, dividiert durch  $e$  und macht dann  $e = 0$ .

Ergebnis: 
$$n = \frac{b^2 c^2}{y^3} + \frac{bc^2}{y^2} + b.$$

Die Rechnung, sagt Schooten, hätte vereinfacht werden können, wenn man von Anfang an alle höheren Potenzen von  $e$  gegenüber der ersten vernachlässigt hätte. Das Ergebnis könne man auch nach der Methode von Huygens erhalten, die dieser aus den Ueberlegungen Fermats hergeleitet habe. Am schnellsten finde man das Ergebnis nach der Methode von Hudde<sup>75</sup>: Man multipliziert die rechte Seite der Gleichung (A) mit den Exponenten von  $y$  und erhält aus der entstehenden Gleichung nach Division durch  $2n$  sofort das Ergebnis.

Im Anschluss an diese Darstellung schreibt Schooten, man könne von Hudde noch andere Methoden zur Bestimmung von Extremwerten, Tangenten, Sekanten und Hinweise zur Lösung weiterer Probleme erwarten<sup>76</sup>.

*Huddes Tangentenmethode* steht in direktem Zusammenhang mit der Extremwertmethode. Sie stammt aus dem Jahre 1656 und ist in einem Brief an Schooten vom 21.11.1659 enthalten, der im Jahre 1713 in französischer Uebersetzung im *Journal littéraire de la Haye* gedruckt wurde<sup>77</sup>.

Es handelt sich hierbei um die Bestimmung der Subtangente  $t$  einer Kurve, die durch eine algebraische Gleichung

$$f(x, y) = \sum a_{ik} x^i y^k = 0 \text{ gegeben ist.}$$

Eine der möglichen Variationen von Huddes Lösung, die der modernen Darstellung entspricht, ist

$$t \sum i a_{ik} x^{i-1} y^k + y \sum k a_{ik} x^i y^{k-1} = 0.$$

Huddes Rezept ist jedoch allgemeiner:

Man betrachte  $f(x, y)$  als Polynom in  $y$  und multipliziere dessen aufeinanderfolgende  $y$ -Potenzen gliedweise mit den Zahlen  $n, n-1, n-2, \dots, n-k$ . Dabei ist mit der höchsten Potenz von  $y$  zu beginnen;  $n$  darf beliebig angenommen werden. Ebenso verfähre man mit  $f(x, y)$  als Polynom in  $x$ . Dann bilde man den Quotienten dieser Ausdrücke und multipliziere ihn mit  $-x$ . Das ergibt  $t$ . Das Verfahren wird erläutert an dem Beispiel

$$ay^3 + xy^3 + b^2y^3 - x^2y^3 - \frac{x^3y^3}{2a} + 2x^4 - 4ab^3 = 0$$

|     |   |   |   |   |   |    |    |
|-----|---|---|---|---|---|----|----|
| I:  | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | -2 | -2 |
| II: | 0 | 1 | 0 | 2 | 3 | 4  | 0  |

daraus

$$t = -x \frac{ay^3 - xy^3 - 4x^4 + 8ab^3}{xy^3 - 2x^2y^3 - \frac{3x^3y^3}{2a} + 8x^4}.$$

Ferner wendet Hudde die Regel an

|                  |                                 |
|------------------|---------------------------------|
| auf die Ellipse  | $y^2a^2 - 2ab^2x + b^2x^2 = 0,$ |
| auf die Parabel  | $y^2 - ax = 0 \quad \text{und}$ |
| auf die Hyperbel | $xy - ab = 0.$                  |

Beigegeben sind zwei allgemeine Figuren für je ein konvexes und konkaves Kurvenstück (dieses selbst ist nicht eingezeichnet) und drei spezielle Figuren für die drei Kegelschnitte. Hudde gibt in seinem Brief an Schooten keinen Beweis der Tangentenregel.

Eine moderne Herleitung würde etwa so aussehen: Die algebraische Ausgangsgleichung

sei  $f(x, y) = \sum a_{ik} x^i y^k = 0.$

$P(x, y)$  sei der Berührungspunkt der Tangente  $AP$  an die durch  $f(x, y) = 0$  gegebene Kurve. (Abb. 3). Ferner sei  $AP_1 = t$ ,  $P_1Q_1 = e$  und  $Q[(x + e), (y + \frac{e}{t})]$  ein zu  $P$  benachbarter Punkt der Tangente.

Falls  $Q$  nur wenig von  $P$  verschieden angenommen wird, ist  $f[(x + e), y(1 + \frac{e}{t})] \approx 0$ .

Nach Fermat ist anzusetzen  $f(x, y) = f[(x + e), y(1 + \frac{e}{t})]$

oder 
$$\sum a_{ik} x^i y^k = \sum a_{ik} (x + e)^i y^k (1 + \frac{e}{t})^k \quad (\text{A})$$

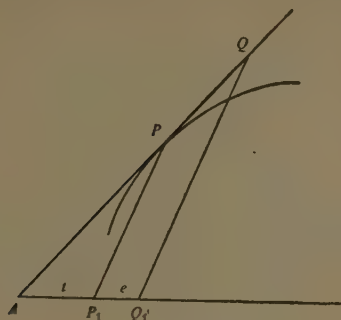


Abb. 3.

Schreibt man die rechtsstehende Summe um in

$$\sum a_{ik}(x + e)^i y^k (1 + \frac{e}{t})^k = \sum a_{ik} x^i y^k + e \left\{ \sum i a_{ik} x^{i-1} y^k + \frac{1}{t} \sum k a_{ik} x^i y^{k-1} \right\} + e^2 g(x, y),$$

so wird (A) zu  $e \left\{ \sum i a_{ik} x^{i-1} y^k + \frac{1}{t} \sum k a_{ik} x^i y^{k-1} \right\} + e^2 g(x, y) = 0$ .

Dividiert man diesen Ausdruck durch  $e$  und setzt alsdann  $e = 0$ , so ergibt sich genau die behauptete Formel.

#### § 4. Die Abhandlungen in den »Exercitationes Mathematicae«.

##### 1. Die Arbeit über die Kreisteilungsgleichungen<sup>78</sup>.

Schooten behandelt das Problem, die Gleichung niedrigsten Grades für die Seite  $x$  des regelmässigen  $n$ -Ecks aufzustellen. Er bedient sich mehrerer geometrischer Ansätze, deren Ergebnisse er miteinander vergleicht. Aus ihnen kann man nach Huddes Eliminationsmethode<sup>79</sup> die einfachste Kreisteilungsgleichung finden. Hudde gibt ein Verfahren, mittels dessen sich die Gleichungen für die  $n$ -Teilung des Winkels sukzessive auseinander herleiten lassen. Er zeigt weiterhin, dass man für bestimmte Eckenzahlen  $n$  aus den Winkelteilungs-Gleichungen sofort zwei verschiedene Kreisteilungs-Gleichungen ableiten kann. (s. unten S. 256/57). Schooten übernimmt die Ergebnisse Huddes, d. h. dessen Rekursionsformeln und die daraus hergeleiteten Gleichungen<sup>80</sup>.

Die Formeln zusammen mit der geometrischen Ableitung finden wir bereits bei Viète<sup>81</sup>. Hudde hat sie wohl von dort übernommen und eine verbesserte Form der Ableitung gefunden.

Moderne Darstellung des Huddeschen Verfahrens: (Abb. 4)

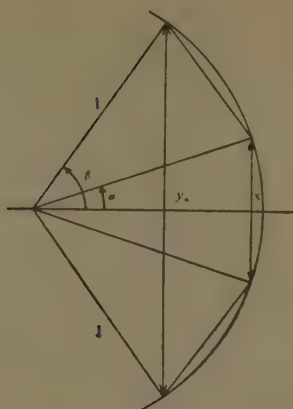


Abb. 4.

Es sei  $\beta = n\alpha$  ( $n$  ganz) und am Einheitskreis

$$x = 2 \sin \alpha,$$

$$y_n = 2 \sin \beta$$

$$y_{n+k} = 2 \sin (k\alpha + \beta), k \text{ ganz.}$$

$$\text{Dann ist: } y_{n+2} + y_{n-2} = 2 \sin (\beta + 2\alpha) + 2 \sin (\beta - 2\alpha)$$

$$= 2 \sin \beta \cdot 2 \cos 2\alpha$$

$$= 2 \sin \beta (2 - 4 \sin^2 \alpha)$$

$$= y_n (2 - x^2).$$

Hieraus folgt:

$$\begin{cases} y_1 = x, \\ y_3 = x(2 - x^2) + x = 3x - x^3, \\ y_5 = y_3(2 - x^2) - y_1 = 5x - 5x^3 + x^5, \\ y_7 = y_5(2 - x^2) - y_3 = 7x - 14x^3 + 7x^5 - x^7, \text{ usw.} \end{cases}$$

Um aus diesen Gleichungen für die  $n$ -Teilung des Winkels die Gleichungen für die  $2n$ -Teilung abzuleiten, müssen wir mit

$$y_0 = 0, y_2 = x \sqrt{4 - x^2} \quad \text{beginnen}^{82}.$$

$$\text{Wir erhalten}^{83} \begin{cases} y_2 = x \sqrt{4 - x^2}, \\ y_4 = (2x - x^3) \sqrt{4 - x^2}, \\ y_6 = (3x - 4x^3 + x^5) \sqrt{4 - x^2}, \\ y_8 = (4x - 10x^3 + 6x^5 - x^7) \sqrt{4 - x^2}, \text{ usw.} \end{cases}$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen ergeben sich für alle  $n$  der Form  $n = 4m + 2$  ( $m$  ganz) zwei verschiedene Kreisteilungsgleichungen:

Ist  $x = 2 \sin \alpha$  die Seite des regelmäßigen  $(4m + 2)$ -Ecks im Einheitskreis, dann gehört zu  $x$  der Zentriwinkel  $2\alpha$ ; also ist  $(2m + 1)\alpha = 90^\circ$ .

Nun sind die Vielecksdiagonalen

$$y_m = 2 \sin m\alpha \text{ und } y_{m+1} = 2 \sin (m+1)\alpha$$

aus den obigen Formeln unmittelbar als Funktionen von  $x$  ablesbar.

Andererseits ist wegen  $2m\alpha = 90^\circ - \alpha$  und  $2(m+1)\alpha = 90^\circ + \alpha$

$$y_m^2 = 4 \sin^2 m\alpha = 2\{1 - \cos 2m\alpha\} = 2 - 2 \sin \alpha = 2 - x$$

und

$$y_{m+1}^2 = 4 \sin^2 (m+1)\alpha = 2\{1 - \cos 2(m+1)\alpha\} = 2 + 2 \sin \alpha = 2 + x.$$

Durch Gleichsetzen ergeben sich 2 Gleichungen für  $x$  zur Kennzeichnung des nämlichen Problems. Ihr g. g. T. ergibt, gleich Null gesetzt, die einfachstmögliche Gleichung<sup>84</sup> für  $x$ .

Man hat im Falle des regulären 10-Ecks ( $m = 2$ ):

$$y_3 = 3x - x^3 \text{ und } y_3^2 = 2 + x,$$

also

$$(3x - x^3)^2 = 2 + x$$

oder

$$x^6 - 6x^4 + 9x^2 - x - 2 = 0. \quad (\text{A})$$

Ferner ist

$$y_2 = x \sqrt{4 - x^2} \text{ und } y_2^2 = 2 - x,$$

also

$$4x^2 - x^4 = 2 - x$$

oder

$$x^4 - 4x^2 - x + 2 = 0. \quad (\text{B})$$

(A) und (B) liefern mittels des g. g. T.

$$x^2 + x - 1 = 0$$

als einfachste Gleichung der 10-Eckseite. Nach dem nämlichen Verfahren erhält Hudde für die 14-Eckseite die Gleichung

$$x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0.$$

## 2. Die Abhandlung *De lineis curvis ex solidi sectione ortis* (Sectio XXII, S. 475/80).

Die Abhandlung entstand im Jahre 1656<sup>85</sup> und befasst sich mit der Aufgabe, Kurven höherer Ordnung durch Schnitte einer Ebene mit einem Körper zu erhalten. Vorbild ist die Erzeugung der Kurven zweiter Ordnung durch Schnitte einer Ebene mit einem Kegel.

Hudde konstruiert die Oberfläche des Körpers vermittels dreier Kegelschnitte, die er in bestimmter Weise im Raume kontinuierlich verschiebt. Dabei verwendet er drei aufeinander senkrechtstehende Koordinatenebenen, also ein räumliches kartesisches Koordinatensystem.

### *Huddes erste Fläche:*

Von  $A$  gehen drei zueinander senkrechte Strecken  $AB = a$ ,  $AC = b$  und  $AD = g$  aus; Gegenpunkt von  $D$  hinsichtlich  $A$  sei  $E$ . Hudde legt in der Ebene  $DBE$  durch diese drei Punkte die Parabel  $DBE$  (Scheitel  $B$ ), in der Ebene  $DCE$  durch diese drei Punkte die

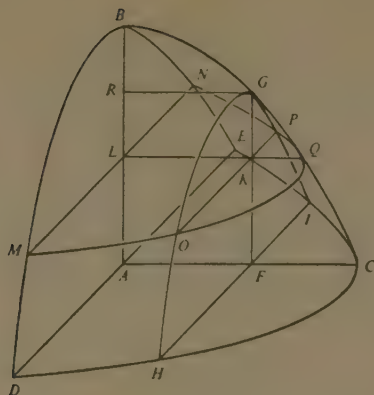


Abb. 5.

Parabel  $DCE$  (Scheitel  $C$ ) und in der Ebene  $ABC$  durch  $B$  und  $C$  die Halbparabel  $BC$  (Scheitel  $B$ ). (Abb. 5).

Ueber diesem Gerüst konstruiert er eine Fläche, indem er sie mit einer beliebigen Parallelebene zur Ebene  $DCE$  in den Punkten  $M, Q, N$  schneidet und die Parabel in dieser Ebene durch die Punkte  $M, Q, N$  (Scheitel  $Q$ ) ergänzt. Nun schneidet er die erhaltene Fläche mit der Ebene  $HOGPI$  parallel zur Ebene  $DBE$  im Abstand  $AF = c$ . Er setzt noch  $GK = x$  und  $OK = PK = y$  und findet nach einiger Rechnung:

$$y^4 = \frac{2ggx}{a}yy + \frac{2ggcc}{bb}yy - \frac{g^4}{aa}xx - \frac{g^4cc}{abb}x.$$

Es entsteht eine Kurve 4. Ordnung.

### Huddes zweite Fläche:

Sie entsteht durch Parallelverschieben der Parabel  $DCE$ : der Scheitel gleitet auf der Halbparabel  $CQGB$  und die Achse trifft immer auf  $AB$ . Auch hier ist der Schnitt  $HOGPI$  eine Kurve 4. Ordnung:

$$y^4 + \frac{2ggc}{b}yy - \frac{g^4}{a}x = 0. \quad (A)$$

Man erhält eine neue Schiebefläche, wenn man statt der Parabel  $DHCIE$  die neue Parabel (A) auf  $CQGB$  gleiten lässt. Zur Gleichung für deren Schnittkurve im Abstand  $c$  gelangt man, indem man in (A) anstelle von  $x$  die Grösse

$$\sqrt{c^2 + \frac{b^2x}{a}} - c \quad \text{setzt.}$$

Das ergibt die Gleichung

$$y^8 + \frac{4g^4c}{b}y^6 + \left(\frac{4g^4c^3}{b^2} + \frac{2g^4c}{a}\right)y^4 + \frac{4g^4c^3}{ab}y^2 - \frac{g^4b^3}{a^3}x = 0.$$

Bei Fortsetzung des Verfahrens erhält man nach  $n$  Schritten Flächen, deren ebene Schnittkurven von der Ordnung  $2^{n+1}$  sind.

Verwendet man anstelle der Ausgangsparabeln andere Kegelschnitte, so gelangt man zu entsprechenden Ergebnissen.

In *Section XXX* (S. 515/16) der *Miscellanae* beweist Hudde einen Satz von Descartes, wonach der Schwerpunkt eines Körpers je nach Lage desselben im Schwerfeld der Erde verschiedene Lage innerhalb des Körpers annehmen soll. Diese Studie zeigt, dass Hudde unrichtige Vorstellungen vom Gravitationsfeld der Erde hatte.

### § 5. Die mathematischen Arbeiten aus dem Briefwechsel.

#### 1. Die Sluse'schen Perlenkurven<sup>86</sup>.

In Band II der Huygens-Werke findet sich ein Briefwechsel zwischen Schooten und Huygens, an dem auch Hudde wesentlich beteiligt ist. Sluse hatte Huygens auf die sog. Perlenkurve hingewiesen<sup>87</sup>, die in moderner Schreibweise durch die Gleichung

$$x(x-a)^2 = b^2y$$

gekennzeichnet ist. Gefordert wurde eine Tangentenkonstruktion, die

durch  $\int_{x_1}^{x_2} y dx$  gekennzeichnete Fläche und deren Schwerpunkt.

Schooten legt die Aufgabe »zwei bekannten Mathematikern«, nämlich Hudde und Heuraet<sup>88</sup>, vor und gibt deren Ergebnisse an Huygens zurück. Gleichzeitig stellt er seinerseits die Aufgabe, die Fläche, den Schwerpunkt und die Tangenteneigenschaft der drei weiteren Kurven zu finden<sup>89</sup>:

$$(1) a^2x = y^3 - 2ay^2 + a^2y;$$

$$(2) y^6 - 3axy^4 - 2a^2xy^3 + 3a^2x^2y^2 - 6a^3x^2y + a^4x^2 - a^3x^3 = 0;$$

$$(3) x + y = \sqrt[4]{ax^3}.$$

Huygens gibt die Aufgaben an Sluse weiter<sup>90</sup>. Dieser sendet alsbald<sup>91</sup> eine Tangentenkonstruktion für die Kurve (1). Huygens gibt die Antwort zusammen mit seinen eigenen Ergebnissen umgehend an Schooten weiter<sup>92</sup>. Er selbst löst das Tangentenproblem für die Kurven (1) und (3) und ermittelt den Schwerpunkt der dritten. Die Behandlung der zweiten Kurve lehnen beide wegen der – wie sie glauben – zu komplizierten Gleichungsform ab.

Schooten teilt mit<sup>93</sup>, dass jene drei Kurven von Hudde stammen. Dieser äussert sich<sup>94</sup> über das Tangentenproblem wie folgt: Beide (Sluse und Huygens) haben nur den einfachen Fall der Tangente in einem Punkte einer Kurve behandelt, nicht aber von einem Punkte ausserhalb,

»obwohl die Methode, dies zu finden, schon lange von anderen angegeben wurde und man dazu nur den ersten Anfang der Geometrie und algebraisch rechnen können muss«.

Dann rechtfertigt er seine zweite Aufgabe und gibt an, wie er seine Kurven konstruiert hat<sup>95</sup>:

In einem kartesischen  $\xi, \eta$ -Koordinatensystem seien die Parabeln mit den Gleichungen  $\eta^2 = a\xi$  und  $\eta^2 = a^2\xi$  gegeben. (Abb. 6).

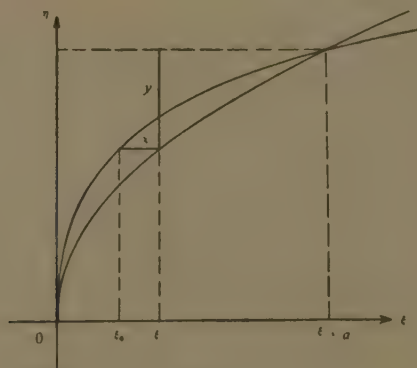


Abb. 6.

Hudde setzt  $y = a - \sqrt{a^2\xi}$ ,  $x = \xi - \xi_0$ ,  $\xi_0 = \left(\frac{y^2}{a}\right)$

Durch Entfernen von  $\xi$  und  $\xi_0$  entsteht (1).

Mit  $\xi = x$  und  $y = \sqrt{a^2\xi} - \sqrt{a^2x}$  ergibt sich  $y = \sqrt{a^2x} - \sqrt{ax}$  und durch Umrechnen

$$y^6 - 3axy^4 - 2a^2xy^3 + 3a^2x^2y^2 - 6a^2x^3y + a^4x^2 - a^2x^3 = 0.$$

Das ist die Gleichung der wegen ihrer »Künstlichkeit« kritisierten 2. Kurve. Sie hat nach Konstruktion die nämliche Fläche wie Sluses Perle. Die Flächen sämtlicher Kurven lassen sich darstellen als Differenzflächen zweier Parabelflächen. Schwerpunkt und Fläche der zur Diskussion gestellten Kurven ergeben sich aus Schwerpunkt und Segment der Parabeln. Die hier zur Konstruktion von Kurven angewandte Methode lässt sich durch Uebergang zu anderen Parabeln (auch solchen höherer Ordnung)<sup>96</sup> beliebig variieren.

Abschliessend sagt Hudde<sup>97</sup>: Wenn von zwei Kurvenstücken die Flächen und die Schwerpunkte bekannt sind, dann sind sie auch für alle anderen Flächenstücke ermittelbar, die aus den ursprünglichen auf die oben angegebene Art gebildet werden. Er fügt hinzu, die Methode lasse sich auch auf Körper im Raum anwenden.

Ersichtlich ist Hudde in dieser Auseinandersetzung der überlegene. Er hat die gestellte Aufgabe elegant gelöst, die Perlenkurve neuartig hergeleitet und eine weitgehende Verallgemeinerung gefunden.

## 2. Der Briefwechsel zwischen Hudde und Huygens über das Glücksspiel.

In Band V der H. O. findet sich ein Briefwechsel zwischen Hudde und Huygens über Glücksspiel-Aufgaben<sup>98</sup>. Die Grundlage bildet ein Teil der Huygens'schen Abhandlung *Ueber das Rechnen beim Glücksspiel*<sup>99</sup>.

In diesem Briefwechsel, der aus dem Jahre 1665 stammt, werden im wesentlichen folgende 4 Aufgaben behandelt:

- (1) 3 Spieler, A, B, C spielen mit 12 Knöpfen, 4 weissen und 8 schwarzen. Laut Abmachung gewinnt derjenige, der zuerst einen weissen Knopf zieht. A zieht als erster, B als zweiter und C als letzter. Welches sind ihre Gewinnchancen?<sup>100</sup>
- (2) A und B spielen mit 12 Knöpfen, 4 weissen und 8 schwarzen. A wettet gegen B, dass er unter 7 gezogenen Knöpfen 3 weisse finden wird. Wie stehen die Chancen A : B?<sup>101</sup>
- (3) A und B werfen eine Münze (Kopf oder Adler) unter der Bedingung, dass derjenige, der Adler wirft, einen Dukaten setzen muss, während derjenige, der Kopf wirft, alles nehmen darf, was gesetzt ist. Wie stehen die Chancen für A?
- (4) Dieselbe Aufgabe wie (3), nur lautet hier die Frage: Wieviel müssen A und B von vorn herein setzen, damit ihre Chancen gleich werden?

Diese Aufgaben lassen verschiedene Auslegungen zu, die zu verschiedenen Ergebnissen führen. Dies ist der Grund, warum Hudde und Huygens in ihrem ausgedehnten Briefwechsel keine Einigung über die »richtigen« Resultate erzielen können.

Die Antwort für die *erste Aufgabe* lautet:

|              | A   | B   | C   |
|--------------|-----|-----|-----|
| nach Hudde   | 232 | 159 | 104 |
| nach Huygens | 9   | 6   | 4   |

Diese Ergebnisse stimmen fast überein. Die genauen Zahlen für Hudde wären

$$234 : 156 : 104 = 9 : 6 : 4.$$

Es kann sich um einen Rechen- oder Schreibfehler handeln. Nach Huygens' Methode entsteht das Ergebnis so<sup>102</sup>.

Die Chance von A sei  $x$ , die von B  $y$  und die von C  $z$ . Beginnt A, so ist die Wahrscheinlichkeit (W. K.) dafür, dass er sofort gewinnt, gleich  $\frac{4}{12}$ . Gewinnt er nicht, so rückt er an die dritte Stelle und es bleibt ihm die Chance von C.

Dieser Fall tritt ein mit der W. K.  $\frac{8}{12}$ . Also ist die Chance von A:

$$x = \frac{4}{12} + \frac{8}{12}z = \frac{1}{3} + 2z$$

B hat die W. K.  $\frac{8}{12}$  dafür, dass er an die erste Stelle gelangt. Also ist

$$y = \frac{8}{12}x.$$

C hat die W. K.  $\frac{8}{12}$  dafür, an die zweite Stelle zu gelangen; also ist

$$z = \frac{8}{12}y.$$

Aus den drei Gleichungen für  $x$ ,  $y$  und  $z$  erhält man die Werte

$$x = \frac{9}{19}, y = \frac{6}{19}, z = \frac{4}{19}.$$

Man kann dieses Ergebnis auch direkt durch Summation der günstigen W. K. erhalten. Vermutlich hat Hudde diesen Weg eingeschlagen<sup>103</sup>, die Ergebnisse zunächst in Formeln dargestellt und seine Zahlen durch Einsetzen der speziellen Werte erhalten.

Bei der *zweiten Aufgabe* findet Hudde die Chancen 14 : 19, Huygens 35 : 64. Das beruht auf der verschiedenartigen Auffassung der Aufgabe. Hudde bezieht den Fall mit ein, dass 4 weiße Knöpfe gezogen werden, Huygens schliesst ihn aus. Beidemale ist die Zahl der *möglichen* Fälle ( $\frac{12}{7}$ ).

Nach Hudde sind  $4 \cdot \binom{8}{4} + \binom{8}{3} = 336$  Fälle für A günstig, nach Huygens nur  $4 \cdot \binom{8}{4} = 280$  Fälle<sup>104</sup>. Die Chance für A wird damit bei Hudde

$$\frac{336}{\binom{12}{7}} = \frac{336}{792} = \frac{14}{33}, \text{ für B: } 1 - \frac{14}{33} = \frac{19}{33};$$

im Huygens'schen Falle findet man für A

$$\frac{280}{792} = \frac{35}{99}, \text{ für B: } \frac{64}{99}.$$

Die *dritte Aufgabe* behandelt Hudde unter der Voraussetzung, dass nur einmal ein Dukaten gesetzt wird (Huygens nimmt dagegen an, dass jedesmal, wenn Adler geworfen wird, ein Dukaten zu setzen ist). Ausserdem soll A mit dem Spiel beginnen und zuerst Adler werfen. Als Chance für A findet Hudde den Wert  $\frac{1}{6}$ , (Huygens  $\frac{4}{27}$ ). Huddes Ergebnis folgt durch Summieren der für A günstigen W. K.:

$$\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^7} + \dots = \frac{1}{6}.$$

Bei Behandlung der *vierten Aufgabe* setzt Hudde einschränkend voraus, dass nicht mehr als 2 Dukaten gesetzt werden dürfen. Die Chance für A gibt er als  $\frac{4}{3}$ . Die eigentliche Frage ist damit nicht beantwortet.

Diese Aufgaben werden (mit kleinen Abwandlungen) im Briefwechsel zwischen Hudde und Huygens diskutiert, ohne dass sich Uebereinstimmung erzielen lässt.

Um dem Streit ein Ende zu machen, entschliesst sich Hudde, eine der angewendeten Methoden preiszugeben<sup>105</sup>. Diese bezieht sich auf die folgende neue Aufgabe:

- (5) A und B ziehen Karten. A nimmt immer eine von drei Karten, von denen eine weiss und zwei schwarz sind. B zieht aus einer Anzahl Karten eine heraus, deren Verhältnis weiss zu schwarz zwar fest, aber vorläufig unbekannt ist. Derjenige, der eine schwarze Karte zieht, zahlt einen Dukaten. Derjenige, der eine weisse Karte zieht, erhält den ganzen Einsatz. A zieht zuerst. Die Frage lautet: welches Verhältnis muss man den Karten von B geben, damit die Chancen gleich sind?

Zur Lösung setzt Hudde so an:

$$\text{Chance, wenn } \left\{ \begin{array}{ll} \text{A alles nimmt} & = a \\ \text{A einen Dukaten zahlt} & = b \\ \text{B alles nimmt} & = c \\ \text{B einen Dukaten zahlt} & = d \end{array} \right.$$

Er findet, dass bei gleichen Chancen gelten muss:

$$c(a + b) = ad.$$

Das kann man folgendermassen herleiten<sup>106</sup>:

Mit Huddes Bezeichnungen ergeben sich folgende günstige Wahrscheinlichkeiten:

|           | für A          | für B         | (Der Einfachheit halber ist hier $a + b = c + d = 1$ gesetzt) |
|-----------|----------------|---------------|---------------------------------------------------------------|
| 1 Dukaten | <i>bda</i>     | <i>bc</i>     |                                                               |
| 2 Dukaten | <i>bdbda</i>   | <i>bdbc</i>   |                                                               |
| 3 Dukaten | <i>bdbdbda</i> | <i>bdbdbc</i> |                                                               |

Summiert

$$A: abd[1 + bd + (bd)^2 + \dots]$$

$$B: bc [1 + bd + (bd)^2 + \dots]$$

Statt  $a, b, c, d$  sollte eigentlich stehen:

$$\frac{a}{a+b}, \frac{b}{a+b}, \frac{c}{c+d}, \frac{d}{c+d}.$$

Durch Gleichsetzen der Gewinn-Wahrscheinlichkeiten folgt also

$$\frac{bc}{(a+b)(c+d)} = \frac{abd}{(a+b)^2(c+d)} \quad \text{oder } c(a+b) = ad,$$

wie oben behauptet.

### § 6. Hudde-Stellen in Schootens »Commentarii« zur Geometria von Descartes.

1. In den *Commentarii in librum II* behandelt Schooten die Eigenschaften der Kegelschnitte<sup>107</sup>. Dabei spricht er unter Berufung auf Descartes von der Umkehrung mathematischer Sätze durch Vertauschen der Behauptung mit einer Voraussetzung. Wie das analytisch zu bewerkstelligen sei, dafür habe Hudde ein Beispiel gegeben<sup>108</sup>. Es beziehe sich auf den Satz<sup>109</sup>:

Ist  $ABD$  Halbkreis und  $CD$  Durchmesserlot, dann ist  $AC \cdot CB = CD^2$ . Hudde stellt durch Rechnung unter Verwendung des Pythagoreischen Lehrsatzes fest: Wenn  $CD$  senkrecht zu  $AB$  steht und  $AC \cdot CB = CD^2$  ist, dann muss  $D$  auf dem Kreis über Durchmesser  $AB$  liegen.

2. Descartes handelt im 3. Buch der *Géométrie*<sup>110</sup> von der durch Multiplikation jeder Gleichungslösung mit dem nämlichen konstanten Faktor erzielbaren Gleichungstransformation. Im zugehörigen Kommentar<sup>111</sup> berichtet Schooten über Huddes Beweis dafür, dass die Gleichungen

$$zz \pm az - bb = 0$$

keine anderen Lösungen als

$$z = \mp \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$$

haben und dass dies die einfachstmöglichen Ausdrücke zur Darstellung der Lösungen sind. Daraus wird klar, fährt Schooten fort, dass auch die bei der *Cardanischen* Formel zur Auflösung der (allgemeinen) kubischen Gleichung ohne 2. Glied auftretenden Kubikwurzeln die einfachstmöglichen sind<sup>112</sup>.

### 3. Huddes Konstruktion der Lösungen biquadratischer und kubischer Gleichungen mit alternierenden Vorzeichen.

Hudde konstruiert die Lösungen der Gleichungen

$$z^4 - pz^3 + qz^2 - rz + s = 0 \text{ und } z^3 - pz^2 + qz - r = 0$$

vermittels eines Kreises und einer Hyperbel<sup>113</sup>.

a) Die Konstruktion der biquadratischen Gleichung.

Im Achsensystem  $AB/AC$  (Abb. 7) mache man  $AD = \frac{1}{2}p$  und bestimme  $E$  über  $D$  so, dass  $AD \cdot DE = \sqrt{s}$  ist. Dann zeichne man die Hyperbel durch  $E$  mit den Achsen als Asymptoten. Man bestimme ferner den Punkt  $F$  senkrecht über  $D$  so, dass

$$DF = \frac{r}{2\sqrt{s}},$$

und zeichne den Kreis über Durchmesser  $AF$ .

Auf diesem bestimme man  $G$  so, dass  $AG = \sqrt{q}$ , und schlage einen zweiten Kreis um  $F$  durch  $G$ . Die Lote aus den Schnittpunkten  $H$  des zweiten Kreises mit der Hyperbel auf  $AC$  ergeben die Beträge der reellen Wurzeln.

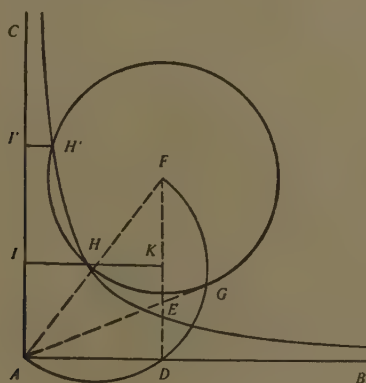


Abb. 7.

Beweis: Sei  $IH = z$ ; das Rechteck  $AH$  ist gleich dem Rechteck  $AD \cdot DE = \sqrt{s}$ . Also ist  $AI = \frac{\sqrt{s}}{z} = DK$ . Wegen  $DF = \frac{r}{2\sqrt{s}}$  wird  $KF = \frac{r}{2\sqrt{s}} - \frac{\sqrt{s}}{z}$  und  $KF^2 = \frac{s}{z^2} - \frac{r}{z} + \frac{r^2}{4s}$ . Ferner ist  $KH^2 = z^2 - pz + \frac{1}{4}p^2$ , also

$$FH^2 = \frac{s}{z^2} - \frac{r}{z} + \frac{r^2}{4s} + z^2 - pz + \frac{1}{4}p^2.$$

Da aber

$$FH^2 = AF^2 - AG^2 = \frac{1}{4}p^2 + \frac{r^2}{4s} - q, \quad \text{folgt}$$

$$\frac{s}{z^3} - \frac{r}{z} + z^3 - pz + q = 0 \quad \text{usw.}$$

b) Die Konstruktion der kubischen Gleichung (Abb. 8).

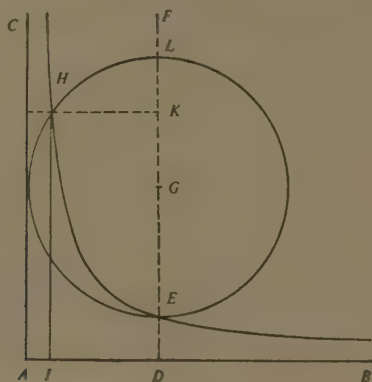


Abb. 8.

Man mache  $AD = \sqrt[3]{q}$ ;  $DE = \frac{r}{q}$  und zeichne wieder die Hyperbel durch E mit AB und AC als Asymptoten. Ferner sei  $EF = p$  und G der Mittelpunkt von DF. Um G schlage man den Kreis durch E; die Lote aus den Schnittpunkten H des Kreises mit der Hyperbel auf AB ergeben die Beträge der Wurzeln. (E ausgenommen)

Beweis: Sei  $IH = z$ ; dann ist  $AI = \frac{r}{qz} \sqrt[3]{q}$ ,  $ID = KH = \left( \sqrt[3]{q} - \frac{r}{qz} \right) \sqrt[3]{q}$ ,  $KH^2 = q - \frac{2r}{z} + \frac{r^2}{qz^2}$ . Ferner ist  $EK = z - \frac{r}{q}$  und  $KL = p - z$ , also

$$KH^2 = EK \cdot KL = pz - \frac{pr}{q} - z^2 + \frac{rz}{q}.$$

Durch Gleichsetzen findet man

$$z^4 - \left( \frac{r}{q} + p \right) z^3 + \left( q + \frac{pr}{q} \right) z^2 - 2rz + \frac{r^2}{q} = 0.$$

Diese Gleichung hat den Teiler  $z - \frac{r}{q}$ ; Division ergibt

$$z^3 - pz^2 + qz - r = 0. \quad Q. e. d.$$

Schootens Kommentare zur *Geometria* von Descartes sind gedruckte Vorlesungen, die Schooten als *Professor matheseos* in Leiden hielt. Hudde hat seine Beiträge sicher als Student abgefasst, als er bei Schooten hörte<sup>114</sup>.

In den vorhergehenden Abschnitten sind alle bisher bekannten mathematischen Arbeiten von Johann Hudde besprochen. Aus Hinweisen in den erhaltenen Schriften und in der zeitgenössischen Literatur wissen wir einiges über den Inhalt weiterer mathematischer Studien<sup>115</sup>.

Zusammenfassend ergibt sich aus dem heute Zugänglichen folgendes:

Hudde war durch Schooten mit der modernen mathematischen Forschung seiner Zeit bekannt geworden, vor allem mit der analytischen Methode von Descartes. Deren Ausgestaltung bedeutete Ausbau der analytischen Geometrie und der Algebra. Wenn im Algebraischen selbst Mathematikern wie Hudde der letzte Erfolg versagt blieb, so lag die Ursache im grundsätzlichen Unterschied zwischen der Behandlung der Gleichungen 4. und 5. Grades, den man damals noch nicht einmal *ahnen* konnte.

Descartes fordert in der Mathematik »exakte« Methoden unter Beschränkung auf *Algebraisches*. Fermats Tangentenmethode lehnt er zunächst ab<sup>116</sup>, hat jedoch im Grunde nichts Gleichwertiges. Erst Hudde erkennt, dass Fermats Verfahren im algebraischen Fall durch die ebenso einfache Doppelwurzelmethode ersetzt werden kann, und gibt dieser eine vortreffliche algorithmische Form. Auch seine Quadraturen beruhen auf *algebraischen* Umformungen. So sieht sich Hudde schon früh an den Grenzen der damals modernen Mathematik.

Hudde ist vielleicht der begabteste unter Schootens Schülern, übrigens von diesem weit stärker beeinflusst als die andern, wie Heuraet und Huygens. Mit zäher Energie überwindet er algorithmische Schwierigkeiten; hellen Blickes erfasst er das Wesentliche. Bei Schootens Tod (1660) ist das Bild, das sich Hudde von der Mathematik macht, schon völlig abgerundet. Von aussen her erwartet Hudde keine entscheidenden Impulse mehr. Er betreibt die Mathematik als Liebhaberei, als etwas Spielerisches. Deshalb sagt er einmal von ihr, im Grunde sei sie doch nur eine »Beschäftigung mit fruchtlosen Fragen«<sup>117</sup> und erfolgreich wendet er sich zu den konkreten Problemen des täglichen Berufslebens, die sich mit mathematischen Methoden behandeln lassen, wie z. B. die Berechnung von Leibrenten<sup>118</sup>.

Die Zeitgenossen sehen in Hudde einen Mathematiker von Rang und hoher Bedeutung. So schreibt Leibniz noch 1697, man könne die Lösung des schwierigen *Brachystochronen-Problems* nur von de l'Hôpital, Newton, den Bernoullis und Hudde erwarten, »wenn dieser solche Untersuchungen nicht schon lange aufgegeben hätte«<sup>119</sup>.

*Hinweise auf mathematische Arbeiten von J. Hudde,  
die bisher nicht aufgefunden wurden.*

1. Huddes unveröffentlichte Regeln zur Reduktion von Gleichungen (Siehe diese Arbeit S. 279, Anmerkung 55).
2. Ableitung der Cardanischen Formeln auf eine zweite Art, die von der in *De reductione aequationum* angegebenen wesentlich verschieden ist (Siehe S. 280, Anmerkung 56).
3. Eine Abhandlung aus dem Jahre 1656 über die Bestimmung von Extremwerten, deren Inhaltsangabe den Schluss des Briefes *De maximis et minimis* bildet (Siehe Anhang, S. 274).
4. Huddes Methode zur Berechnung von Leibrenten<sup>120</sup>.
5. Huddes Calcul zur Behandlung von Glücksspielaufgaben<sup>121</sup>.  
In Leibniz' Briefwechsel mit Mathematikern<sup>122</sup> ist der Inhalt einer Unterredung mit Hudde wiedergegeben. Darin heisst es u. a.:
6. Hudde zeigte mir einen Brief von 1662 an einen gewissen van Duyk<sup>123</sup>. Aus diesem Schreiben geht hervor, dass Hudde Mercators Hyperbelquadratur<sup>124</sup> schon 1662 besass.
7. Er hat auch Regeln, um Gleichungen durch Multiplizieren so aufzubauen, dass nicht nur *gleiche* Wurzeln entstehen, sondern auch Wurzeln in arithmetischer oder geometrischer oder anderer Folge.
8. Hudde kennt auch eine sehr elegante Näherung für die Kreisquadratur mittels zweier quadrierbarer Kurven innerhalb bzw. ausserhalb des Kreises. Sie ist so ausgezeichnet, dass sie die Kreisfläche mit Hilfe des 12-Ecks mit einem Fehler von nur 0,003  $\frac{0}{100}$  liefert.
9. Er summiert Reihen durch wiederholte Subtraktion von geometrischen Reihen. Dabei subtrahiert er geometrische Reihen, deren Summen ebenfalls eine geometrische Reihe bilden. So kann er die Summe der Summen bilden und erhält die Summe der Reihe. Er zeigt das bei einer Reihe, deren Zähler in arithmetischer und deren Nenner in geometrischer Folge zunehmen, wie in  $\frac{1}{1} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \dots$
10. Er hat drei Reihen wie die von Wallis für die Interpolation des Kreises.
11. Er hat auch eine Methode, die reellen Wurzeln einer Gleichung mit zum Teil komplexen Wurzeln zu finden, und zwar mit Hilfe einer anderen Gleichung, die ebensoviele Wurzeln hat wie die erste, reelle und komplexe gemischt.

12. Er kann auch die Quadraturen und Tangenteneigenschaften algebraischer Kurven sehr oft sofort angeben, ohne die Brüche und Wurzeln zu entfernen.
13. Im Brief vom 21. VI. (1. VII.) 1677 an Oldenburg<sup>125</sup> berichtet Leibniz, Hudde habe ihm gesagt, er könne die Gleichung für den Umriss des Bildes irgend einer bekannten Persönlichkeit herstellen.

### Anhang.

1. *Huddes Formeln aus Regel 11, Fall 4: (Geometria, S. 450/52).* Wenn eine Gleichung 6. Grades in einen Faktor

$$x^2 + yx + z = 0$$

und einen unvollständigen Faktor 4. Grades zerfällt, können die Werte für  $y$  und  $z$  aus folgenden Formeln bestimmt werden<sup>126</sup>:

$$(A) \quad z^2 - \frac{1}{2} \left( 2q + p^2 - \frac{r}{p} \right) z + \frac{1}{2} \left( p^2 q - rp + s - \frac{t}{p} \right) = 0;$$

$$z^2 - \frac{1}{\frac{r}{q} + p^2} \left[ \left( \frac{t}{p} + s - rp + p^2 q \right) z + 2v \right] = 0;$$

$$y = p.$$

$$(B) \quad y^3 - \left( p + \frac{2v}{t} \right) y^2 + \left( q + \frac{pv}{t} \right) y - r = 0;$$

$$y^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{qt}{v} + p - \frac{rt^2}{v^2} + \frac{st^3}{v^3} \right) y + \frac{t^4}{2v^3} + \frac{rt}{2v} = 0;$$

$$z = \frac{yv}{t}.$$

$$(C) \quad y^4 - \left( \frac{q}{p} + 2p \right) y^3 + \left( 3q + p^2 \right) y^2 - \left( \frac{s}{p} + 2pq + \frac{q^2}{p} - r \right) y$$

$$+ \frac{t}{p} + q^2 - \frac{rq}{p} = 0;$$

$$y^4 - \left(\frac{t}{s} + 2p\right)y^3 + \left(p^2 + \frac{tp}{s} + 2q\right)y^2 - \left(2pq + \frac{tq}{s} - \frac{vp}{s}\right)y$$

$$+ q^2 - \frac{vq}{s} = 0;$$

$$- \left(\frac{t}{s} - \frac{q}{p}\right)y^3 + \left(\frac{tp}{s} - q\right)y^2 - \left(\frac{tq - vp}{s} - \frac{s + q^2}{p} + r\right)y$$

$$- \frac{vq}{s} - \frac{t}{p} + \frac{rq}{p} = 0;$$

$$z = -py + y^2 + q.$$

$$(D) \quad qy^3 + (s + q^2)y - t + rq = 0; z = y^2 + q;$$

$$sy^4 - ty^3 + 2qsy^2 - tqy + q^2s - vq = 0.$$

$$(e) \quad y = p; z = q;$$

$$(f) \quad y = p; z = q - \frac{r}{p} = \frac{vp}{t};$$

$$(g) \quad y = \frac{t}{s}; z = \frac{v}{s}.$$

Die angegebenen Formeln sind wie folgt zu benutzen: Wenn in der gegebenen Gleichung keine Glieder fehlen, kann sie dividiert werden durch einen der Ausdrücke A, B, C, e, f, g;

|      |              |                           |               |
|------|--------------|---------------------------|---------------|
| wenn | $p = 0$ ,    | durch einen der Ausdrücke | B, D, g       |
|      | $q = 0$ ,    | - - - -                   | A, B, C, f, g |
|      | $r = 0$ ,    | - - - -                   | A, B, C, e    |
|      | $s = 0$ ,    | - - - -                   | A, B, C, e, f |
|      | $t = 0$ ,    | - - - -                   | A, C, e       |
|      | $p, q = 0$ , | - - - -                   | B, D, g       |
|      | $p, r = 0$ , | - - - -                   | B, D          |
|      | $p, s = 0$ , | - - - -                   | B, D          |
|      | $p, t = 0$ , | - - - -                   | D             |
|      | $q, r = 0$ , | - - - -                   | A, B, C       |
|      | $q, s = 0$ , | - - - -                   | A, B, C, f    |
|      | $q, t = 0$ , | - - - -                   | A, C          |
|      | $r, s = 0$ , | - - - -                   | A, B, C       |

|                    |                                |
|--------------------|--------------------------------|
| $r, t = 0$ ,       | durch einen der Ausdrücke A, C |
| $s, t = 0$ ,       | — — — — A, C, e                |
| $p, q, r = 0$ ,    | — — — — B, D                   |
| $p, q, s = 0$ ,    | — — — — B                      |
| $p, r, s = 0$ ,    | — — — — B, D                   |
| $p, r, t = 0$ ,    | — — — — D                      |
| $q, r, s = 0$ ,    | — — — — A, B, C                |
| $q, r, t = 0$ ,    | — — — — A, C                   |
| $q, s, t = 0$ ,    | — — — — A                      |
| $r, s, t = 0$ ,    | — — — — A, C                   |
| $p, q, r, s = 0$ , | — — — — B                      |
| $q, r, s, t = 0$ , | — — — — A                      |

$p, q, s, t = 0$  ergibt  $y^6 + ry^3 + v = 0$  und  $z = y^2$ ;

$p, q, r, s, t = 0$  ergibt  $y^6 + v = 0$  und  $z = y^2$ .

In A, B, C darf man zur Bestimmung von  $y$  und  $z$  irgendeine der angegebenen Gleichungen oder auch mehrere zugleich benutzen, indem man deren g. g. T. bestimmt. Hat man die Teiler A, B, C untersucht, dann braucht man e, f, g nicht zu berücksichtigen, aber nicht umgekehrt.

Die Formeln Huddes ergeben sich etwa aus dem Ansatz

$$\begin{aligned}
 & (x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d)(x^3 + yx + z) \\
 = & x^6 + \underbrace{(a + y)}_p x^5 + (z + \underbrace{ay}_q + \underbrace{b)}_r x^4 + (\underbrace{az}_r + \underbrace{by}_r + c)x^3 + (\underbrace{bz}_s + \underbrace{cy}_s + d)x^2 \\
 & + \underbrace{(cz + dy)}_t x + \underbrace{dz}_v.
 \end{aligned}$$

und zwar ergeben hierin

$$\begin{array}{lll}
 a = 0 & \text{die Formeln (A);} & a = b = 0 \text{ die Formeln (e);} \\
 c = 0 & \text{die Formeln (B);} & a = c = 0 \text{ die Formeln (f);} \\
 b = 0 & \text{die Formeln (C);} & b = c = 0 \text{ die Formeln (g).} \\
 b = 0, y = a & \text{die Formeln (D);} &
 \end{array}$$

Der Fall  $a = b = c = 0$  fehlt, da sämtliche anderen Formeln mit Ausnahme von (D) auch hier gelten.

Unsere Behauptung lässt sich in jedem Fall durch Koeffizientenvergleich leicht beweisen, sodass wir auf die Durchführung im einzelnen verzichten dürfen. Die Tabelle für die Anwendung der Formeln entsteht, indem man aus allen möglichen Fällen A, B, C, D, e, f, g die jeweils unzulässigen ausnimmt:

Ist z. B.  $p = 0$ , dann ist  $a + y = 0$ .

Da in allen Fällen  $y \neq 0$  ist, können die Formeln A, e, f nicht in Betracht kommen; ebenso scheidet (C) aus, da hier  $p$  im Nenner auftritt.

Ist aber  $s = t = 0$ , dann ist

$$bz + cy + d = 0 \text{ und } cz + dy = 0,$$

also  $c \neq 0$ ; denn sonst wäre  $d = b = v = 0$ .

Also scheiden die Fälle D, B, f, g aus.

Als Beispiel behandelt Hudde u. a. die Gleichung (S. 454)

$$x^6 + 2x^5 + 3x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 1 = 0.$$

Nach (B) müssen die Koeffizienten  $y$  und  $z$  eines möglichen quadratischen Teilers den Gleichungen genügen

$$2y^2 - 5y + 3 = 0; y^3 - 4y^2 + 5y - 2 = 0; z = 1.$$

Der g. g. T. der ersten beiden Gleichungen ist  $y - 1$ .

Der gesuchte Teiler ist  $x^2 + x + 1$ ,

der Kofaktor  $x^4 + x^3 + x^2 + 1$ .

2. Huddes Formeln für die Gleichung 6. Grades mit quadratischem Teiler aus Regel 17<sup>127</sup>.

Hat die Gleichung

$$x^6 + px^5 + qx^4 + rx^3 + sx^2 + tx + v = 0$$

einen Teiler der Form  $x^2 + yx + h = 0$ ,

und wird  $v$  durch  $h$  geteilt, so muss

$$y = \frac{ph - \frac{h}{t}}{2h - \frac{2v}{h^2}} \pm \sqrt{\left( \frac{ph - \frac{t}{h}}{2h - \frac{2v}{h^2}} \right)^2 + \frac{s - \frac{v}{h} + h^2 - qh}{h - \frac{v}{h^2}}}$$

sein.

Diese Formel versagt, wenn  $h = \frac{v}{h^2}$ , d. h.  $h = \sqrt[3]{v}$  ist.

Jetzt wird

$$y = \frac{-s + q\sqrt[3]{v}}{p\sqrt[3]{v} - \frac{t}{\sqrt[3]{v}}}$$

Ist überdies  $p\sqrt[3]{v^2} = t$ , dann ist  $y$  Wurzel der Gleichung

$$y^3 - py^2 + \left( \frac{s}{\sqrt[3]{v}} - 3\sqrt[3]{v} \right) y + 2p\sqrt[3]{v} - r = 0.$$

Man kann diese Formeln herleiten aus dem Ansatz

$$\begin{aligned} & x^6 + px^5 + qx^4 + rx^3 + sx^2 + tx + v \\ &= (x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d)(x^2 + yx + h). \end{aligned}$$

3. Huddes Resolvente der Gleichung 6. Grades mit quadratischem Teiler.  
(Geometria, S. 487/88).

Durch Koeffizientenvergleich:

- (1)  $q = z - y^3 + w$
- (2)  $r = k + yz - wy$
- (3)  $s = l + wz + ky$
- (4)  $t = wk + ly$
- (5)  $v = wl$

Daraus erhält Hudde die Gleichung

$$\begin{aligned} & y^{15} + 4qy^{13} - 2ry^{12} + 6q^2y^{11} + 10ty^{10} - 2qsy^9 + 12qty^8 - 3rty^7 \\ & \quad - 2s \quad - 6qr \quad - 26v \quad + 6rs \quad - 24qv \\ & \quad \quad \quad + 4q^3 \quad - 6q^2r \quad - 7s^2 \\ & \quad \quad \quad \quad \quad + 2q^2s \\ & \quad \quad \quad \quad \quad \quad + q^4 \\ & + 10sty^6 - 12t^2y^5 + 2qsty^4 - 5qt^2y^3 - 6rt^2y^2 - q^2t^2y - qrt^2 = 0. \\ & - 30rv \quad + 6qrt \quad - 6qrv \quad + 7rst \quad + 2r^3s \quad + 3st^2 \quad + t^3 \\ & + 2q^2t \quad - 18q^2v \quad - 6r^2t \quad + 3r^2v \quad \quad \quad + qrst \quad + r^2st \\ & + 4qrs \quad - 6qs^2 \quad + 8rs^2 \quad + q^2rt \quad \quad \quad + 3qr^2v - r^3v \\ & + 2r^3 \quad - 6r^2s \quad - 2q^2rs \quad - 4q^3v \quad \quad \quad - 9rtv \\ & - 2q^3r \quad + 2q^3s \quad + 2qr^3 \quad + q^2s^2 \quad \quad \quad - r^3t \\ & \quad \quad + 54sv \quad - 18vt \quad + 18qsv \quad \quad \quad - r^2s^2 \\ & \quad \quad \quad - 4s^3 \\ & \quad \quad \quad - 2qr^2s \\ & \quad \quad \quad - r^4 \\ & \quad \quad \quad - 27v^2 \end{aligned}$$

Dabei gilt:

$$w = \frac{5y^6 + 6qy^6 - 4ry^5 + 5sy^4 + q^2y^4 - 5ty^3 - r^2y^2 + qsy^2 - 9ty^2 - qty + sry - tr}{14y^6 + 8qy^4 + 5ry^3 + 2q^2y^2 - 6sy^2 + qry - 3ty - r^2}.$$

#### 4. Zum Brief »De Maximis et Minimis«.

Am Ende des Briefes gibt Hudde eine Uebersicht über den Inhalt einer anderen Abhandlung, die er etwa im Jahre 1655 oder 1656 zusammengestellt hat<sup>128</sup>. Darin wird behandelt:

(1) Extremwertbestimmung nach folgenden Gesichtspunkten:

Gegeben sei eine algebraische Gleichung.

I. Wir wissen, dass ein Extremwert vorliegt.

- a) Die gegebene Gleichung hat nur eine Unbekannte und ist entweder ganzrational oder gebrochen rational.
- b) Es kommen mehrere Unbekannte vor und dabei
  1. so viele Gleichungen, dass alles auf eine Gleichung mit einer Unbekannten reduziert werden kann;
  2. weniger Gleichungen, sodass die Reduktion nicht durchgeführt werden kann.

II. Wir wissen nicht, ob ein Maximum oder ein Minimum oder überhaupt ein Extremwert vorliegt: »Diese Fälle betrachte ich absolut oder bezogen auf ein bestimmtes [geometrisches] Problem.«

(2) Anwendung und Nutzen der Methode.

### LITERATUR-UEBERSICHT

#### A. Originalliteratur

1. *Geometria Renati Cartesii*, ed. Frans van Schooten, *Amstelaedami* 1659 61, *apud Ludovicum et Danielelem Elsevirios*. Der allein verwendete Band I enthält folgende Stücke:

*Renati Descartes Geometria liber I, II, III*: S. 1–106.

*Florimondi De Beaune in Geometriam Renati des Cartes Notae breves*. S. 107–142.

*Francisci a Schooten in Geometriam Renati Des Cartes Commentarii*. S. 143–344.

(Mit *Appendix: De Cubicarum aequationum resolutione*, S. 345–368 und einem *Additamentum*, S. 369–400.)

*Johannis Huddenii epistola prima de reductione aequationum*. S. 401–506.

*Johannis Huddenii epistola secunda de maximis et minimis* S. 507–516.

*Henrici van Heuraet epistola de transmutatione curvarum linearum in rectas*. S. 517 bis 520.

2. Francisci a Schooten *Exercitationum Mathematicarum libri quinque*; Lugd. Batav. (Leiden), ex officina Johannis Elsevirii, 1657.
3. *Œuvres complètes* de Christiaan Huygens, publiées par la Société Hollandaise des Sciences, 22 Bände, La Haye, 1888 bis 1950. Verlag M. Nijhoff.
4. C. J. Gerhardt, *Leibniz' Briefwechsel mit Mathematikern*, I (einziger Band), Berlin 1899. Verlag Mayer u. Müller.
5. Pierre de Fermat, *Œuvres*, ed. P. Tannery-Ch. Henry, Paris 1891/1912 (4 Bde). *Suppl.* ed. C. de Waard, Paris 1922. Verlag Gauthier-Villars.
- 5a. *Pierre de Fermats Abhandlungen über Maxima und Minima*, deutsch von M. Miller, *Ostwalds Klass. d. ex. Wissensch.* Nr. 238, Leipzig 1934. Verlag W. Engelmann.

## B. Zweitliteratur

1. Johannes Tropfke, *Geschichte der Elementarmathematik*, 3. Auflage, Band 1 bis 4 (1930, 1933, 1937, 1940). 2. Auflage, Band 5 bis 7 (1923, 1924, 1924). Leipzig-Berlin, W. de Gruyter.
2. O. Becker und Jos. E. Hofmann, *Geschichte der Mathematik*, Bonn 1951, Athenäum Verlag.
3. H. Scholz, A. Kratzer und Jos. E. Hofmann, *Descartes*, drei Vorträge, Münster 1951, Aschendorffsche Verlagsbuchhandlung.
4. Jos. E. Hofmann, *Zur Entdeckungsgeschichte der höheren Analysis im 17. Jahrhundert*, Math.-Phys. Semesterberichte, I, 1950, S. 220/55.
5. Jos. E. Hofmann, *Das Problem der Parabel- und Hyperbelquadratur im Wandel der Zeiten*, Math.-Phys. Semesterberichte 3, 1953, S. 59/79.
6. J. É. Montucla, *Histoire des mathématiques*, 2. Auflage ed. J. J. Lalande, Paris 1799 bis 1802 (4 Bände). Verlag Henri Agasse.
7. *Nieuw Nederlandsch biografisch Woordenboek*, ed. P. C. Molhuysen-P. J. Blok, Verlag A. W. Sijthoff, Leiden. 1911-1937.
8. M. D. J. Korteweg, *Das Geburtsjahr von Johannes Hudde*, Zeitschrift für Mathematik und Physik, 41, 1896, S. 23/24.
9. Jak. Bernoulli, *Ars conjectandi*, ed. N. Bernoulli I, Basel 1713, *impensis Thurnisiorum fratrum*; deutsch von R. Haussner, *Ostwalds Klass. d. ex. Wissenschaft.* Nr. 107/108, Leipzig 1899, Verlag W. Engelmann.
10. H. G. Zeuthen, *Geschichte der Mathematik im XVI. und XVII. Jahrhundert*, Leipzig 1903, Verlag B. G. Teubner.
11. M. Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, 2. Aufl. Leipzig, Band II (1900), Band III (1901). Verlag B. G. Teubner.

## ANMERKUNGEN

1. M. D. J. Korteweg, *Das Geburtsjahr von Johann Hudde*, Z. M. Ph. 41, 1896, S. 23/24.
2. *Œuvres complètes* de Christian Huygens, La Haye 1888/1950, Bd. I, S. 514, Fussnote. (In der Folge zitiert als H. O.).
3. O. Becker/Jos. E. Hofmann, *Geschichte der Mathematik*, Bonn 1951, Athenäum Verlag, S. 180. (In der Folge zitiert als Be/Ho).

4. Leiden 1657.
5. H. O. II, Nr. 401, 408, 419, 424, 430, 431, 434, 436, 449.
6. *Geometria Renati Cartesii*, ed. Fr. van Schooten, Leiden 1649, 2. vermehrte Ausgabe Amsterdam 1659/61 (2 Bde). Dieser Arbeit ist ein Exemplar der Ausgabe von 1659/61 zugrunde gelegt. Es stimmt beinahe zeilenweise überein mit dem Text der 3. Ausgabe, Frankfurt a. M. 1695, der Zusätze von Jak. Bernoulli angehängt sind. Wir zitieren in Zukunft den ersten Band der Ausgabe von 1659/61 als *Geometria*.
7. H. O. Bd. V.
8. *Nieuw Nederlandsch biografisch Woordenboek*, ed. P. C. Molhuysen – P. J. Blok, Leiden 1911–37, Band I (1911), S. 1172. Die folgenden Darstellungen sind hieraus entnommen.
9. H. O. VII, Nr. 1829 und 1830.
10. *Woordenboek*.<sup>8</sup>
11. *Woordenboek*.<sup>8</sup>
12. H. O. VII, Nr. 1839.
13. Brief an Oldenburg vom 28. November 1676, enthalten in C. J. Gerhardt, *Leibniz' Briefwechsel mit Mathematikern I*, 1899, S. 228/29.
14. *Woordenboek*.<sup>8</sup>
15. *Geometria* S. 402, Zeile 10 ff.: *Sed quid causae est, quin paulo diutius expectem, illaque, quibusdam praeterea additis, sub libelli nomine, accuratius elaborata, publici juris faciam? Maxime cum libellum quendum (quibusdam studiis ex voto ad finem perductis) de Natura, Reductione Determinatione, Resolutione atque Inventione Aequationum praelo subicere proposuerim, (nisi sontica quaedam causa denuo cursum meum remoretur,) cujus maximam jam partem, quod materiam spectat, si pauca quaedam excipias, in numero habeo, adeo ut non nisi in ordinem redigendi labor et quasi forma desideretur.*
16. Be/Ho, S. 179.
17. Fussnote 15.
18. Erste Ausgabe im Anhang zum *Discours de la méthode*, Leiden 1637. Erste lateinische Ausgabe durch Frans van Schooten, Leiden 1649.
19. *Geometria*, S. 505: *Possunt etiam hic quaedam adjungi de signis, ex quibus cognoscitur sitne aliqua aequatio reducibilis nec ne. Verum cum hoc unum sit ex primariis rei capitibus, plus otii et patientiae, quam quidem in praesentiarum mihi suppetit, ad id requiritur.*
20. S. 408: *Si in aequatione literali una vel plures literae seu quantitates cognitae supponantur = 0, atque eo ultimus terminus non evanescat, neque aequatio, quae hinc resultat, reducibilis sit, certum est neque propositam aequationem reducibilem fore. At vero si ultimus terminus evanescat, atque etiam inde resultans aequatio non existat reducibilis, aequatio proposita ad pauciores dimensiones quam ista resultans reduci non poterit.*
21. Zusätze in eckigen Klammern stehen nicht bei Hudde. Sie sind des besseren Verständnisses wegen angefügt.
22. S. 409. Wir geben die Darstellungsweise in der *Geometria*, verwenden aber unser modernes Gleichheitszeichen anstelle des cartesischen  $\propto$ . Die Anordnung nach Spalten soll Klammern ersetzen. Gemeint ist also:
 
$$x^3 - (3a + b)x^2 + (2b^2 + 3ab + 4a^2)x - (3a^3 + b^3 + 5a^2b + 4ab^2) = 0.$$
23. Hudde nennt ein Polynom *irreduzibel*, wenn es sich nicht im Sinne der elementaren

Algebra rational in Faktoren zerlegen lässt. Zerlegungen der Art  $a^2 - b = (a + \sqrt{b}) \cdot (a - \sqrt{b})$  betrachtet er als nicht zulässig. Das geht aus den insgesamt 8 Beispielen einwandfrei hervor.

Von einer (vielleicht gefühlsmässigen) Verwendung des Begriffes der Reduzibilität im modernen Sinne als Zerlegbarkeit über einem bestimmten Körper oder Integritätsbereich kann bei Hudde keine Rede sein.

24. Die Sterne \* bedeuten fehlende Potenzen von  $x$ ;  $\sqrt[3]{C}$  = Kubikwurzel. Diese Schreibweise ist aus Descartes übernommen.
25. S. 407/08: ... *Ponamque tantum reductionum regulas quasdam, quarum plurimas non ita pridem inveni, easque exemplis, ut mentem meam melius percipias, illustrabo, relictis earum demonstrationibus, tum quod maxima earum pars sit perquam inventu facilis, tum, quod rei caput est, quod hominis foret otio suo abutentis, ...*
26. S. 426: IX. *Regula, quae modum docet reducendi omnem aequationem, sive literalem, sive numeralem, quae per aliam, cujus solummodo unus terminus datus est, dividi potest.*
27. Modern:

$$(y^4 + 4y^3 + 10y^2 + 14\frac{1}{2}y + 5)x - (2y^3 + 8y^2 + 16y + 16) = 0.$$

Hudde führt die Herleitung der Gleichung ausführlich durch. Er spricht immer von *Gleichungen*, wo wir uns schon mit *Ausdrücken* begnügen würden.

28. Ueber Huddes Methode zur Bestimmung des g. g. T. zweier oder mehrerer Gleichungen vgl. S. 249 dieser Arbeit.
29. S. 429, Z. 13 ff: *Id tantum addam, haec omnia etiam ex comparatione terminorum duarum ejusdem formae aequationum inveniri posse.*  
Vgl. *Geometria*, S. 46/47 und Johannes Tropfke, *Gesch. d. Elementarmath.* VI<sup>2</sup>, Fussnote 239.
30. XI. *Regula, quae modum docet reducendi omnes aequationes, sive literales, sive numerales, quae produci possunt ex multiplicatione duarum aliarum, in quarum alterutra unus pluresve termini deficiunt.* (S. 439).
31. S. 439: *Brevitatis causa, quantitatem cognitam secundi termini, adfectam signis + vel -, vocabo p; 3tii q; 4ti r; 5ti s; atque sic deinceps: et - p, - q, - r, - s etc. easdem quantitates designabunt, sed contrariis signis adfectas.*  
*Ex. gr. in hac aequatione*

$$\begin{array}{rcl} x^4 - 2ax^3 - 4bbxx + 6abbx - 4a^4 & = & 0 \\ + 3b & & + 2aab \end{array}$$

$$\text{erit} - 2a + 3b = p; - 4bb = q; + 6abb + 2aab = r; - 4a^4 = s; \text{et} + 2a - 3b = - p; + 4bb = - q; \text{etc.}$$

Descartes hat auch schon Normalformen benutzt, jedoch nicht ausdrücklich gefordert. Vgl. Tropfke III<sup>3</sup>, S. 31. Dass das höchste Glied  $x^n$  heissen soll, ist schon auf S. 408 der *Geometria* verabredet.

Hudde nennt erstmalig in der mathematischen Literatur die Unbekannte durchweg  $x$ ; S. 408: ... *et ut distinctius meos conceptus exprimam, primo restringam meas regulas ad eas aequationes, in quibus una tantum incognita quantitas reperitur, quam semper nominabo x.* Vgl. Tropfke III<sup>3</sup>, S. 61.

32. Die allgemeine Ueberschrift zu Fall 2 heisst wörtlich: (S. 443). *Si aliqua aequatio, 6 aut pauciores dimensiones habens, produci possit ex multiplicatione duarum aliarum, quarum altera sit duarum vel plurium dimensionum, ac duarum tantum terminorum; erit*

*ejus formula aliqua ex sequentibus, et poterit dividi per unamquamque aequationem sibi adjunctam.*

33. Diese Formeln lassen sich leicht aus

$$x^4 + sx^3 + tx + v \equiv (x^3 + ax^2 + bx + cx + e)(x + f) = 0$$

durch Koeffizientenvergleich herleiten, dabei ist  $abcef \neq 0$ . Daraus folgt  $f^4 = -s$  und  $ft = v$  usw. Wir würden nunmehr die Unzerlegbarkeit aus der nicht erfüllten Beziehung  $sf^4 + v^4 = 0$  entnehmen.

34. Darstellung von Fall 4 im Anhang dieser Arbeit, S. 269.

35. *XVII. Regula, quae docet modum inveniendi omnes aequationes rationales, quibus aequatio quaevis rationalis et fractione carens, sive literalis, sive numeralis sit, dividi possit.* (S. 469).

36. Ansatz:  $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s \equiv (x^2 + ax + b)(x^2 + gx + h) = 0$ .

Ergebnis: (1)  $p = a + g$ ,

$$(2) q = b + ag + h,$$

$$(3) r = ah + bg,$$

$$(4) s = bh.$$

Ist  $h^2 = s$ , dann ist  $b = h$ , also  $r = (a + g)h = ph$  und  $gp - g^2 = q - 2h$  usw. Ist aber  $h^2 \neq s$ , dann ist  $(p - g)h + gs : h = r$  usw. Bedingung (4) besagt, dass das Absolutglied des Teilers das Absolutglied der Gleichung teilt. Sie steht schon bei Descartes (*Geometria* S. 77). Siehe dazu auch Be/Ho, S. 177/78.

Wir dürfen uns auf Teiler  $h \leq \sqrt{|s|}$  beschränken;  $g$  wird immer ganz.

37. Huddes Formeln für die Gleichung 6. Grades mit quadratischem Teiler siehe im Anhang S. 272.

38. S. 461: *In his sequentibus vero 16, 17, 18, 19 et 20 regulis considerabo, brevitatis causa, ejusmodi tantum aequationes, quarum omnia membra habent eundem numerum dimensionum. Potest enim omnis aequatio, hanc conditionem non habens, facile in talem permutari, ut cuique notum est.*

Die letzten Worte beziehen sich auf die Einführung einer Einheitsstrecke zum Enthomogenisieren und Homogenisieren einer Gleichung. (Descartes, *Géométrie*, I. Buch, Einleitung.)

39. *III. Regula, quae modum docet reducendi omnem aequationem, quae produci potest ex multiplicatione duarum aliarum, quarum una literam aliquam comprehendit, quae in altera non continetur; et quae litera non habet eundem dimensionum numerum in diversis terminis.* (S. 414).

40. ... quaeque litera in aliquo termino tot dimensiones habet, quot in nullo alio. (S. 418).

41. *V. Regula, quae modum docet reducendi omnem aequationem, quae produci potest ex multiplicatione duarum aliarum, quarum una literam aliquam comprehendit, quae in altera non continetur.* (S. 420).

42. *XII. Regula: Si in aequatione proposita reperiatur litera cognita, quae in ultimo termino non contineatur; si illa non nisi semel in aequatione extet, vel semel tantum reperiatur secundum eundem dimensionum numerum (ut in aequatione*

$$\begin{aligned} (x^4 - 2acx^3 + 7aaxc - 2abbb - abbb) &= 0 \\ + 2cc &+ bb - 2acc \\ &+ 4ac \\ &- dd \end{aligned}$$

in qua dd semel duntaxat reperitur, duas habens dimensiones) aequatio semper indivisibilis erit per  $x$ , aut  $xx$ , etc. + vel - quantitate quavis cognita atque rationali. (S. 458 bis 459).

43. XVI. Regula, quae modum docet inveniendi omnes aequationes rationales, duos tantum terminos habentes, quibus aequatio quaevis rationalis et fractione carens, sive literalis, sive numeralis sit, dividi possit. (S. 465).
44. X. Regula, quae modum docet reducendi omnem aequationem, sive literalem, sive numeralem, cujus incognita quantitas (vel alia litera, quae tanquam incognita considerari potest) duos vel plures aequales habet valores. (S. 433).
45. XIX. Regula, quae modum docet reducendi omnem aequationem rationalem fractione et secundo termino carentem, quae dividi possit per aliam, cujus secundus terminus sit rationalis. (S. 486).
46. Dass man das immer erreichen kann, hat Cardano erstmals gezeigt (Tropfke III<sup>3</sup>, S. 138). Descartes zeigt dies ebenfalls (z. B. Geometria, S. 72 ... qua ratione secundus terminus aequationis tolli possit).
47. Siehe im Anhang dieser Arbeit S. 273.
48. Geometria S. 490: Ubi notandum, hanc regulam qua omnes reducibiles aequationes quadrato-quadratae reduci possunt esse plane eandem cum illa, quam D. des Cartes pag. 79, 80 et 81 suae Geometriae descripsit. (Die Seitenzahlen beziehen sich auf die Ausgabe von 1659). Vgl. Tropfke, III<sup>3</sup>, S. 165.  
Dieselbe Herleitung der Descartes'schen Formeln fand auch Schooten: Geometria, S. 135.
49. S. 490: ... Nec dubitare possim, quin ipsam eodem modo, vel certe non multum absimile invenit ... adeo ut, iudicio meo, ne quidem verisimile videatur, ... ipsum ex ullis aliis authoribus, ut nonnulli opinantur, eam desumpsisse.
50. Siehe dazu Be/Ho, S. 178; ferner: Scholz/Kratzer/Hofmann: Descartes, Münster 1951, S. 58.
51. XX. Regula, quae modum docet reducendi omnem aequationem rationalem 4 dimensionum, fractioneque carentem, secundo vero termino, si adsit, manente, ad aliam trium et hanc iterum, si fieri potest, ad alias pauciorum dimensionum. (S. 494/95).
52. In den Beispielen (S. 498)

$$\begin{array}{ccccccc} x^4 & - & 2ax^3 & + & aaxx & + & a^3x - a^4 = 0 \\ & & + & b & - & ab & + & ba^3 \end{array}$$

und

$$\begin{array}{ccccccc} x^3 & - & 20bxx & + & 60aax & - & 120a^3 = 0 \\ & & - & 2a & + & 70ab & - & 60a^2b \end{array}$$

verhilft Ausklammern von  $b$  zu einem absplittbaren Teiler.

53. Im Beispiel (S. 498)  $x^4 + 8acxx - 4aacx + 12aacc = 0$  ist  $c$  quadratisch enthalten.  
-  $aa$

Beim Auflösen nach  $c$  geht die Quadratwurzel auf. Die Gleichung zerfällt in

$$(xx - ax + 2ac)(xx + ax + 6ac) = 0.$$

54. Vergl. etwa Tropfke III<sup>3</sup>, S. 145/46.
55. S. 503: Diversas adhuc alias regulas in paratu habeo, quas hic simul adjungerem, si non aliquid in futurum reservare animus esset: Nimirum inter caeteras una est, per quam omnes irrationales radices tam numeralium, quam literalium aequationum invenio; una per quam omnes aequationes numerales, quae ex duobus rationalibus produci possunt, ad easdem reduco, non cognitis divisoribus ultimi termini; item alia, per quam saepe

- literales aequationes reduco, quaeque in eo consistit, quod unam aut alteram literam ponam = 0, vel = alii alicui quantitati, quam libuerit, et quod hanc aequationem inde resultantem prius reducere coner et postea etiam propositam per hanc.*
56. S. 504: ... nam etiam regulae, quarum ope quarundam cubicarum aequationum radices investigantur, quas Cardanus auctori Scipioni Ferro asscribit, hac etiam methodo inveniri possunt, quae alia est, quam quae in 21 regula ostensa fuit.
  57. vgl. S. 255/57.
  58. S. 422: *Modus inveniendi maximum, duarum (vel plurium) sive aequationum sive quantitatuum, divisorem communem.*
  59. *Geometria* S. 429: *Modus tollendi signa radicalia ex qualibet aequatione proposita.*
  60. S. 429/30: Als allgemeines Beispiel dient die Gleichung  $n = e + g + h + k + m$ , worin die Buchstaben Quadratwurzeln aus rationalen Grössen bedeuten. Hudde geht schrittweise vor, indem er eine Irrationalität nach der andern entfernt. Er macht sein Verfahren am Beispiel mit 5 Quadratwurzeln ( $m = 0$ ) auch *algorithmisch* klar. (S. 430/31). Um  $k$  Quadratwurzeln zu entfernen, muss er  $(k - 1)$  mal quadrieren.
  61. S. 431: Als Rechenbeispiel dient die Gleichung  $n = e + g$ , worin jeder Buchstabe eine Kubikwurzel aus einer rationalen Grösse bedeutet. Wieder wird schrittweise gerechnet.
  62. S. 433: ... *sed quoniam proposui tantummodo hic generalem modum indicare, quo semper omnia signa radicalia tolli queant, ..., ideo huic rei finem imponam.* Vgl. Tropicke III<sup>3</sup>, S. 179. Hudde sieht seine Rechnungen als Beispiele für die Beseitigung der Irrationalitäten aus einer Summe von  $k$   $n$ -ten Wurzeln an.
  63. Be/Ho, S. 179.
  64. Siehe dazu S. 254/55 dieser Arbeit.
  65. Scholz/Kratzer/Hofmann: Descartes, S. 56.
  66. Huddes Brief *De Maximis et Minimis*, *Geometria* S. 507/16. S. 507: *Si in aequatione duae radices sint aequales, atque ipsa multiplicetur per arithmetica Progressionem, quam libuerit; nimirum, primus terminus aequationis per primum terminum progressionis, secundus terminus aequationis per secundum terminum progressionis, et sic deinceps: dico productum fore aequationem, in qua una dictarum radicum reperietur.*
  67. Wir geben den Beweis in verkürzter Darstellung.
  68. Hudde rechnet seine Beispiele auf zwei verschiedenen Wegen vor, denen aber der nämliche Gedanke zugrunde liegt. Den zweiten Weg bezeichnet er als *allgemeine Methode*, da die einzelnen Schritte des ersten hier in einen zusammengefasst sind.
  69. *Geometria*, S. 513: *Sumamus, exempl. gr., tres aequationes, quibus maximam latitudinem curvae determinavi, quales illae pag. 498 exercitationum tuarum mathematicarum reperiuntur.*
  70. In *sectio XXV*, S. 492/93 schreibt Schooten: ... *verum tamen ut rei colophonem addam, sequens problema in medium afferre lubet una cum ejusdem constructione, qualem eam subtilissimus ac praeclare doctus vir Juvenis D. Johannes Huddenius, Amst. Batavus atque amicus meus integerrimus, haud ita pridem invenit.* Es folgt die Problemstellung und in *sectio XXVI*, S. 498 nach Huddes Ausführungen: ... *non ingratum fore existimavi, si modum eandem investigandi, qualem eum ... Huddenius, ... omnium artificiosissime excogitavit, sequenti calculo exhiberem.*
  71. *Francisci a Schooten commentarii in librum II.*
  72. *Geometria*, S. 249/53.

73. In *Geometria*, S. 253/55 erscheint zuerst die Huygens'sche Konstruktion (Diese allein findet sich auch in H. O. XIV, S. 417/18), dann Schootens Beweis unter Verwendung der Fermatschen Methode. Die dortige Figur ist in Abb. 2 vereinfacht.
74. Fermats Originalverfahren findet sich z. B. in *Ostwalds Klassikern* Nr. 238, Leipzig 1934 (deutsch v. M. Miller), S. 26/27.
75. *Geometria*, S. 255: ... *Atque haec quidem via est, quam et Hugenium secutum fuisse confido, prout tangentes curvarum linearum se aliter quam Fermatius ope hujus ipsius methodi quaevisisse mihi asseveravit. Quam viam ut omnium maxime contrahamus, poterimus, invento, ut prius, quadrato ex PC, cum subtilissimo ac saepius laudato nostro Huddeno secundam hanc operationem omnino insuper habere ...*
76. S. 256: *Caeterum quod ad alias methodos attinet, quibus tum maximi et minimi determinatio, tum tangentium sive secantium harum inventio, tum etiam infinitorum aliorum difficilliorum problematum solutio obtineri queunt, poteris eas ab eodem Huddeno expectare.* – Es handelt sich um eine Anspielung auf Huddes Tangentenmethode.
77. Wiederdruck in C. J. Gerhardt, *Leibniz' Briefwechsel mit Mathematikern I*, Berlin 1899, S. 234/37, Beilage. Siehe dazu auch Be/Ho, S. 198: Diese Tangentenregel findet sich fast gleichzeitig und unabhängig auch bei Sluse (1622/85), Huygens und Newton.
78. *Exercitationes mathematicae, Miscellanae, sectio XXI*, S. 464/75: *De figuris ordinatis, circulo inscriptis; ac angulorum vel arcuum in partes aequales sectione.*
79. S. 469: ... *His adde reductionis modum a D<sup>no</sup> Huddeno inventum, quo ex binis aequationibus ... aequationem simplicissimam investigat.*
80. S. 469 ... *subjungam eas [aequationes], quae ab eodem Huddeno hunc in finem sunt inventae.*
81. Fr. Viète, *Opera*, ed. Fr. van Schooten, Leiden 1646, S. 291/97. (*Angulares sectiones*, Erstdruck 1615).
82. Folge der Beziehung  $2 \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \sqrt{4 - (2 \sin \alpha)^2}$ .
83. Nach Hudde lassen sich die Ausdrücke für  $y_2, y_6, y_{10} \dots$  aus denen für  $y_1, y_3, y_5 \dots$  direkt bestimmen, indem man das dortige  $x$  durch  $x \sqrt{4 - x^2}$  ersetzt.
84. Hudde führt seine Ueberlegungen nicht allgemein durch, sondern nur am speziellen Beispiel der 10- und 14-Eckseite. Die Beispiele lassen die allgemeine Methode sofort erkennen.
85. S. 475: *Cum curvarum linearum contemplatio per se jucunda pariter atque utilis existat, ac illae, quae superioris sunt generis vel ultra Sectiones Conicas compositae, a nullo (quod sciam) hactenus ex solidi alicujus sectione generari ostensae sint: visum fuit quae circa hanc rem tribus ab hinc annis ab ... Huddeno excogitata et inventa sunt.*
86. René François de Sluse (1622–85).
87. H. O. II, Nr. 401 (14.8.1657), S. 47.
88. Hendrik van Heuraet (1633–60?).
89. H. O. II, Nr. 419 (29.10.1657), S. 73/76.
90. H. O. II, Nr. 424 (2.11.1657), S. 80.
91. H. O. II, Nr. 430 (XI 1657), S. 88.
92. H. O. II, Nr. 431 (23.11.1657), S. 88/91.
93. H. O. II, Nr. 434 (11.12.1657), S. 94/95.
94. H. O. II, Nr. 436 (Brief an Schooten vom 1.12.1657), S. 97/101.
95. Wir geben Huddes Ueberlegungen in moderner Darstellung mit vereinfachter Figur.
96. Eine Methode zur Bestimmung von Schwerpunkt und Fläche der höheren Parabeln

- (und Hyperbeln) hat Fermat angegeben. Vgl. Be/Ho S. 181. Ferner: Jos. E. Hofmann, *Das Problem der Parabel- und Hyperbelquadratur im Wandel der Zeiten*, Math., Phys. Semesterberichte III, 1953, S. 66/70.
97. H. O. II, S. 101, Zeile 5 ff.
  98. H. O. V, Nr. 1374, 1375, 1384, 1392, 1403, 1404, 1422, 1423, 1427, 1431, 1434, 1446, 1447/50.
  99. Chr. Huygens, *De Ratiociniis in ludo aleae, Exerc. Math.*, S. 519/34 = *Rekeningh in spelen van Gheluck, Mathematische Oefeningen*, Amsterdam 1660, S. 487/500 = H. O. XIV, S. 49/101.
  100. Diese Aufgabe steht als Nr. 2 im Anhang der Abhandlung von Huygens. Im Briefwechsel: H. O. V, S. 306.
  101. Diese Aufgabe steht als Nr. 4 im Anhang der Abhandlung von Huygens. Im Briefwechsel: H. O. V, S. 307.
  102. Dargestellt z. B. in Jak. Bernoulli, *Ars conjectandi*, ed. N. Bernoulli I, Basel 1713, Teil I, Anhang, Aufg. 2. Deutsche Uebers. in *Ostwalds Klassikern*, Nr. 107, S. 62. Vgl. ferner Huygens' Aufzeichnungen von 1665 in H. O. XIV, S. 96.
  103. Anhaltspunkte für Huddes Methode finden sich in dem Brief von Hudde an Huygens vom 20.7.1665; H. O. V, Nr. 1431, S. 411/14.
  104. Die Huygens'sche Auszählung findet sich in H. O. XIV, S. 97/99; auf S. 100/01 rechnet Huygens auch nach der Huddeschen Auffassung und bestätigt dessen Ergebnis.
  105. H. O. V, Nr. 1431 (20.7.1665), S. 411/12.
  106. Hudde deutet diese Ableitung nur an (S. 414).
  107. *Geometria*, S. 207: *De locis solidis sive conicarum sectionum proprietatibus*.
  108. *Geometria*, S. 220: *Caeterum quoniam D<sup>nus</sup> Des Cartes universim iis tantum propositionibus usus fuisse videtur, quae non nisi proprietates declarant, quae cum subjecto suo omnimode recipiuntur, et a logicis proprietates 4<sup>ta</sup> modi appellari solent: visum fuit hoc loco deinceps modum, quo cognosci possunt, qualem eum . . . Johannes Huddenus, . . . excogitavit, per unum aut alterum exemplum exponere*.
  109. *Geometria*, S. 221.
  110. *Geometria*, S. 76.
  111. S. 295 unten: *Quibus ita constitutis, ut pateat quo pacto hae radices surdis numeris sint exprimendae, visum fuit ea, quae ab. . . Huddenio . . . circa haec excogitata sunt, in medium adducere*.
  112. Schooten verweist hier auf *Geometria*, S. 94/95. Es handelt sich um eine Stelle im 3. Buch der *Géométrie*, wo Descartes von der Auflösung der kubischen Gleichung durch Radikale spricht.
  113. *Geometria*, S. 325: *Solida problemata etiam hyperbolae et circuli beneficio, postquam ad aequationem trium quatuorve dimensionum sunt reducta, construi possint, intelligere non modo jucundum quin imo utile existit: visum fuit hoc loco afferre regulam, ab . . . Huddenio inventam*.
  114. In den Darstellungen von Korteweg<sup>1</sup> und im *Woordenboek*<sup>8</sup> heisst es, es sei nicht sicher, ob Hudde in Leiden Vorlesungen bei Schooten gehört habe. Die Einschreibung eines Johann Hudde, 25, im Leidener Universitätsmatrikel von 1654 als Student der Medizin könne auch einem Namensvetter gelten, der am 13.8.1628 als Sohn von Hendrik Hudde und Clara Nijs in Amsterdam getauft wurde.
  115. Eine Zusammenstellung dieser Hinweise siehe S. 268/69.

116. Be/Ho, S. 182.
117. *Woordenboek*,<sup>8</sup> Spalte 1173, Zeile 11 v. u.
118. H. O. VII, Nr. 1839 (18.8.1671).
119. Vgl. Leibniz-Joh. Bernoulli, Brief vom 23.II. (5. III.) 1697, abgedruckt in *Leibnizens mathematischen Schriften*, ed. C. I. Gerhardt, Bd. III., Halle 1855, S. 370.
120. H. O. VII, Nr. 1839 (18.8.1671) und Nr. 1843 (14.9.1671). Hudde schickt hier in einem Brief an Huygens Sterbetafeln jener Personen, auf deren Häupter in den Jahren 1586–90 von den Generalstaaten Leibrenten-Verträge abgeschlossen wurden. Aus diesen Tafeln errechnet er durch Mittelbildung den Wert einer Leibrente, bezogen auf ein bestimmtes Lebensalter. Sein Wert stimmt überein mit demjenigen, den Jan de Witt (1625/72) aus derselben Tafel nach anderer Methode errechnet hatte. Ueber die Methode der Berechnung, die den Zeitgenossen genau bekannt gewesen sein muss, ist in den Tafeln nichts zu finden.
121. H. O. VIII, Nr. 2095: Brief von Salomon Dierquens an Huygens (1676). Der Brief ist ein Einzelstück und gibt die Behandlung einer Glücksspielaufgabe wieder. Die Lösung geschieht, wie angegeben, »*Volgens de Heer Huddes Reeckeningh soo geseght wert*«. (*d'après le calcul de M. Hudde, à ce qu'on disait*).
122. S. 228/29.
123. Adriaan van Duyk, (1628–?); H. O. I, S. 245/46.
124. Hierzu vgl.: Jos. E. Hofmann, *Nicolaus Mercator (Kauffman), sein Leben und Wirken, vorzugsweise als Mathematiker*, Akademie d. Wiss. u. d. Lit., Mainz, Abhdlg. d. Math. Naturw. Klasse, 1950, Nr. 3, insbes. S. 63/66 mit weiteren Literaturangaben.
125. *Leibniz' Briefwechsel mit Mathematikern*,<sup>13</sup> S. 244.
126. *Si aequatio aliqua 6 dimensionum produci possit ex multiplicatione duarum aliarum, quarum altera habeat duas dimensiones, et nullum terminum = 0; altera vero unum, pluresve terminos = 0; erit ea divisibilis per  $xx + yx + z = 0$ , cujus y et z valores per sequentes aequationes ac sequenti modo sunt inveniendi*, (S. 449).  
Wir geben die Gleichungen in moderner Schreibweise. Hudde hat keine Klammern, sondern schreibt die Summanden untereinander.
127. *Geometria*, S. 473: *Si aequatio proposita 6 dimensionum . . . divisibilis sit per aequationem rationalem 2 dimensionum, (in qua nullus terminus desit), poterit dividi per aequationem  $xx + yx + h = 0$ , existente  $y = \dots$*
128. *Geometria*, S. 515 . . . *At vero ne te lateat, quid hic desiderari putem, adjungam argumentum tractatus, quem de hac materia ante 2 aut 3 annos in proprios usus adornavi, . . . In eo autem pertractantur*  
(I) *Methodus de Maximis et Minimis. Termini vero algebraici, maximum vel minimum designantes, considerantur*  
I. *Vel respectu cognitionis nostrae, sic ut certi simus in iis maximum esse comprehensum, si aliquod detur maximum; aut minimum, si aliquod minimum detur.*  
*Termini autem hi algebraici in se continent*  
*Vel unam duntaxat incognitam quantitatem, habentem*  
1. *Vel fractionem nullam, in cujus denominatore incognita reperitur quantitas.*  
2. *Vel fractiones, in quarum denominatore ipsa reperitur. Vel plures una incognita quantitate, quae duplices sunt:*  
1. *Vel tot simul cum iis aequationes dantur, seu in natura problematis includuntur, quot sunt incognitae quantitates una excepta;*  
2. *Vel non totidem, aut etiam nullae.*

- II. *Vel respectu nostrae inscientiae, id est, cum incerti sumus, utrum in iis aliquod maximum aut minimum, aut utrumque, aut etiam neutrum contineatur. Ipsos autem rursus considero vel absolute, vel relative ad aliquod problema.*
- (2) *Ejusdem usus atque utilitas, quae quidem se longe lateque extendit, ac praesertim ad ea problemata, quae alias difficulter ad aequationem revocari possunt.*

## Reviews

---

J. D. BERNAL: *Science in History*. London, Watts & Co., 1954. xxiv, 967 pp., 42 s.

I did not open this volume without great expectations. It is well-known that history of science is much hampered by the double obstacle that most scientists have no sense of history, while most historians are ignorant not only of the facts, but of the very spirit of science. Now, Prof. Bernal is one of the few eminent scientists of our time who have shown a keen interest for, and deep understanding of, the historical and social aspects of the development of science. Several shorter essays from his versatile pen are as remarkable for the competence and shrewd judgement exhibited in the analysis of the economic and social background of scientific progress as for the generous sincerity inspiring the author's exposure of social evils detrimental to this progress. He would seem, therefore, the ideal author for such a book as the present one, which aims at a synthetic exposition of the development of science in its broad historical setting and contemporary context. Only a man with Prof. Bernal's rare combination of talents, and with his courage, could be expected to attempt with any chance of success this much needed, but formidable task.

Shall I confess that I am disappointed? This seems a harsh statement, in view not only of the immense labour which has gone into the preparation of this book, but also of the many admirable pages it contains. I am not going to cavil at minor inaccuracies, inevitable in an undertaking of this scope; my chief criticism bears on the one hand on the composition of the book, on the other of Prof. Bernal's method.

This bulky volume has its origin in a course of lectures, the plan of which is still recognisable in the general disposition of the subject matter: a historical survey fills the first half of the book; this is followed by an outline of the present state of science and a discussion of its technological and social relations, in which is included a detailed analysis of sociology in its historical perspective. The author tells us how he was led, in the

course of years, to elaborate upon each aspect of this vast enquiry. I am afraid he has been carried away by his enthusiasm for a fascinating subject and has not exercised sufficient firmness in deciding where to stop. At any rate, the final product is a disconcerting hybrid between the racy essay and the encyclopaedic digest, the latter element rather spoiling by its massive intrusion the effect aimed at by the former. The diligent reader is presumed to absorb in bewildering succession a treatise of archaeology, a textbook on the social history of science, a popular survey of modern physics and biology and an ABC of marxism, in order to prepare himself for the political pamphlet on science in the time of the Cold War, in which the book culminates. No wonder if he now and then, in spite of the solid structural arrangement of the parts, loses the thread of the argument.

However, this lack of balance and unity would be readily forgiven if one felt that the accumulated material had been critically gathered with the view of guaranteeing the accuracy of the picture and providing a firm basis for rational analysis. The general impression is unfortunately quite different; in fact, one wonders whom Prof. Bernal really expects to convince by the dogmatic way in which he has chosen to approach his subject. In his shorter essays, whatever dogmatic tendencies he might have were kept in the background, much to the advantage of the argument; it would seem that in this larger work they have been brought to the fore by some unhappy effort at systematisation. However this may be, the result is the more unfortunate as the message Prof. Bernal intends to convey is a timely and important one. The main theme is familiar: the development of science is primarily conditioned by economic and social factors; history shows how its progress has been fostered by rising social classes and held up by the reactionary elements of society, and thus has its clear lesson for our own times. It is only by a painstaking elaboration of details, however, that such a general view can get substance and meaning, and prove its fruitfulness as a guiding principle. And it is just this critical point that Prof. Bernal, for all his provocative originality, has failed to make out. On almost every page one meets with statements not explicitly supported by any evidence (even though such evidence may be available), and worse still, one constantly gets the impression that the author is building up artificial constructions to suit preconceived ideas, rather than arriving at the proposed interpretation by rigorous inference.

The weakness of Prof. Bernal's method is already noticeable in the historical part of his work. This is especially to be regretted because it is

just in this field that the introduction of a sound scientific method of analysis is most urgently needed and could yield extremely valuable results. The excellent section on prehistory, which could rely on Prof. Gordon Childe's fundamental work, and that on modern science (from the XVIIth to the XIXth century), of which Prof. Bernal has obviously made a deeper study, show what he might have done in the way of a general synthesis, had he not, by sheer impatience, so often shot beside the mark.

Let us look, for instance, at his account of the history of Greek science. It is presented in its entirety, from presocratic to hellenistic times, against the background of a 'slave-holding society'. As a result, Prof. Bernal, who never shrinks from giving the picture an emotional colouring, passes condemnation over it, as the kind of emasculated science one expects from a reactionary class. To be sure, he himself feels that it is a bit hard to squeeze into this scheme Democrit, for instance, but the half-hearted restrictions which he inserts here and there only succeed in blurring the argument and depriving it from whatever superficial plausibility it might have. In point of fact, Prof. Bernal's description does not even remotely tally the evidence of either history or science: the connection between the successive phases of Greek scientific thought and the evolution of the class structure of Greek society is certainly a very real and essential one, but it is much more complex and subtle than the crude opposition of a cultured leisure class and brutish slaves can possibly suggest.

I am not here blaming the author for 'oversimplification' in the pointless way in which historians without scientific education are wont to do. History, like any other science, is essentially a process of simplification; to deny this would be to reduce it to a barren literary exercise. It will not do, however, to tamper with a complicated dialectical process in the hope that after ironing out some of its oscillations the longer waves that remain may still show it in a reasonably truthful perspective. In the case under discussion, Prof. Bernal has ironed out the class of free workers and craftsmen which it is indispensable to take into account in order to understand essential features of scientific development in the hellenistic period. Prof. Bernal has actually fallen into that very error of perspective which renders valueless most of the considerations of literary historians on 'Greek man', the 'Greek ideal' and similar fictions: he debunks Plato instead of glorifying him, but he does not seem to realise that the platonic tradition (culminating in Archimedes) is only one aspect of Greek science, and socially not the most important one, in spite of its technical excellence.

He ignores the whole tradition of practical science and technology—algebra, hydraulics, astronomy—carried on by free men of humbler station, but by no means inferior ingenuity. It is true that this tradition has left little literary evidence; but the scanty information we have of such men as Ktesibios, Straton of Lampsachos, Hipparchos or Aristarchos of Samos suffices to show us that they were animated by a much more 'modern' spirit than their platonistic contemporaries.

In fact, the hellenistic times present in many respects a striking similarity with the early XVIth century. Science and technology were much on the same level at the two periods, and they were supported by very similar social structures, composed essentially of free men. Only in agriculture and mining ruthless exploitation of human labour prevailed: and there was little to choose for peasants and miners between the status of serfdom and that of slavery. The real challenge, then, for the scientific historian, is to explain why the hellenistic period was followed by a slow, but irremediable decay, whereas the XVIth century witnessed the birth of capitalism and modern science. From what has just been said it should be clear that the presence or absence of slavery cannot have been a decisive factor. The answer must rather be sought along demographic lines; the essential difference between the two periods is above all one of scale: only in the XVIth century was the 'primitive accumulation' large enough to initiate a capitalist economy. On this new economic and social basis, a convergence and mutual fructification became possible of the two scientific traditions: the theoretical, platonistic one and the practical one, which had become divorced from each other during the long period of decay of antique society. Is it not disconcerting that Prof. Bernal's philosophy, which he so insistently describes as 'marxist' should have prompted him to by-pass such a striking illustration of the rigorous historical method advocated by Marx and Engels?

When he comes to survey the mediaeval period, the author again misses a most interesting problem, just because he is too anxious to persuade us that no good can come out of the Church. He utterly fails to do justice to a very great XIVth century Churchman, Nicole Oresme, whose thought, emerging from the barbarous darkness of the times, exhibits distinctly modern features: an attempt at quantitative description of phenomena, a discussion of mechanical problems foreshadowing Galilei, truly Copernican speculations on the motion of the earth, and not least, a penetrating analysis of the nature and role of money (which Prof. Bernal does not even mention). Surely, this is a phenomenon which

it is futile to ignore or belittle, but which rather demands a careful analysis. The XIVth century in Western Europe is a period of economic expansion and social evolution which shows an unmistakable trend towards capitalism; it is, so to speak, a prefiguration of the movement which was to be successful two centuries later. The effort, hampered by particularism and other weaknesses, was abortive: it was all over by the middle of the XVth century. But so long as it lasted, it created a climate favourable to science, and Oresme is the most brilliant testimony of this intellectual revival. Oresme belonged to the School, but he did not address himself to his fellow-schoolmen; he wrote in the vernacular (a racy French dialect) for the King and his bourgeois administrators, for the merchants, for the 'mechaniques' (as he calls the craftsmen). His attitude was that of the theoretical scientist trying to help practical men. It is obvious that theoretical science could only be cultivated by clerics, since the Church had the monopoly of education in theoretical thinking; but it would be wrong to imagine that the Church encouraged such intellectual adventures. Roger Bacon's confinement, Giordano Bruno's burning at the stake: that was the regular way of the Church with independent thinkers. If Oresme was enabled to write and teach so freely, it is just because the rise of the bourgeoisie, especially in France, led to a temporary eclipse of the authority of the Pope. So, in the end, our estimate of the relationship of science to the social forces at play on the mediaeval scene is not so different from Prof. Bernal's: but his omission of this dramatic social and intellectual upsurge of the XIVth century (there is just an inadequate mention of Oresme's achievements on pp. 221-3-5 and a stray allusion to the economic aspect on p. 884, but no suggestion of any connection between them!) distorts the picture to an inadmissible extent.

By this lengthy discussion of two typical examples I hope to have made it clear in what respect Prof. Bernal's approach to the historical problems sometimes falls short of a scientific analysis. Nothing is more fatal to the latter than setting about it with the (perhaps hardly conscious) wish to fit the picture into a ready-made frame. The idea that there is an interplay of social and intellectual currents is a powerful guiding principle in this analysis, but it must be kept under control: the form of the interplay, or even its presence in a given case, can only be ascertained at the end of the analysis, never decided beforehand. This remark sound very pedantic, but it is not superfluous, since even such a shrewd and acute scientific historian as Prof. Bernal may fall a victim to hasty schematising. In fact, 'marxist' historians would do well to meditate Engels' admirable letter to

Bloch (21–22 Sept. 1890)<sup>1</sup> before throwing about their ‘marxist interpretations’. Strictly speaking, there is no such thing as a ‘marxist interpretation of history’, just as little as there is a ‘maxwellian interpretation of electromagnetism’: there is scientific history, of which Marx was an inspiring master, but to this science there is no dogmatic *via regia*.

Scientific history has a great humanist tradition. True historians of this school, Augustin Thierry and Henri Pirenne as well as Karl Marx, were also true humanists: they paid due regard to the importance of the individual thoughts and passions which do not cease to animate men even when they act collectively under the pressure of economic necessity. Scholastic schematisation banishes this essential human element and degrades the drama of history to a Punch and Judy show.

However disastrous upon historical studies, the effect of dogmatism is worse still in the proper domain of scientific thought, physics or biology, where it numbs critical judgement and diverts thinking into the barren ground of casuistics. It is distressing that we should be reminded of this, not by calling up scenes of mediaeval obscurantism from a forgotten past, but by looking around us now, in the middle of the XXth century,—in fact, I grieve to say, by Prof. Bernal’s book itself. Contemporary scholasticism is especially treacherous because it keeps the outward appearances of scientific criticism and usurps a glorious parentage. Adepts of ‘dialectical materialism’ are offended by the suggestion that the metaphysical system they advocate under this name is no more than a caricature, in fact the dialectical negation, of the original ideas of Marx and Engels<sup>2</sup>. Yet, all they can do to reassure us is to point (as Prof. Bernal does on p. 670) to such events as ‘Stalin’s contribution to the linguistics controversy in 1950 with its condemnation of imposed orthodoxy in science and its encouragement of free discussion’. What impression is such a statement likely to make on scientists whose tradition of free discussion goes back to the XVIth century?

However, the proof of the pudding is in the eating, and Prof. Bernal gives us enough to taste and make short process of his conception of ‘dialectical materialism’. If the development of the theory of atomic phenomena initiated by the discovery of the quantum of action and the elementary constituents of atoms does not represent one of the major dialectic processes in the whole dialectical growth of scientific thought, and if quantum mechanics is not its crowning synthesis, frankly it is hard to say what a dialectic process could well be<sup>3</sup>. Well now, Prof. Bernal does not like the idea at all: according to him, quantum mechanics is

just an obscure, incomplete, provisional theory. The widening of scope, the increased power of prediction, the deeper insight into the dialectical relationships between physical concepts, which the new theory affords, mean nothing to him. The replacement of determinism by a more general, statistical, form of causality is not greeted by him as a tremendous step forward in the elaboration of a rational conception of the physical world, but scorned as an 'idealistic' aberration. In such philosophical assessments, he puts physicists just as much as physics upside down: he praises Einstein in the idealistic mood of his later years, and scoffs at Bohr without realising that the latter's common-sense attitude is fundamentally 'materialistic'. All this trouble because the quantum is not dreamt of in his philosophy! What respect does a philosophy deserve (by whatever name it is called) which makes its adherents blind to the progress of scientific thought and misleads them into sterile opposition to it?

Prof. Bernal's account of modern physics is, I am afraid, rendered largely useless by this astonishing error of judgment. Other sections concerned with recent aspects of scientific development suffer less from the straitjacket of 'dialectical materialism' and are very readable; but the whole treatment is marred by the frequent recurrence of obviously biased assertions. This most regrettably casts a shadow of doubt upon the accompanying discussion of the social relations of science, which the author takes up in a most interesting way with his accustomed vigour and fearlessness. In principle, it is certainly right not to separate the social aspects from the purely scientific ones, but the analysis of their interrelations is beset with logical pitfalls, which can only be avoided by utmost caution. Prof. Bernal exercises no such caution, and as a result repeatedly falls into confusion; as, for instance, when he motivates his rejection of some scientific or philosophic idea by the fact that it has been used for socially reactionary purposes. Of course, most of the people against whom he directs his criticism deserve his pungent strictures; every scientist will applaud his exposure of such idealistic muddleheads as Jeans and Eddington, whose widespread popular writings are doing incalculable damage to the cause of rational thinking. It is all the more unfortunate that he should himself sin against this very cause, albeit on a materialistic basis.

Prof. Bernal's most regrettable injustice is his wholesale condemnation of Mach. I hope it is not solely based on Lenin's authority<sup>4</sup>; I am quite certain that it is not based on a serious study of Mach's work. Mach (together with Fechner, another thinker whose merit is not sufficiently

recognised) was a pioneer in the psycho-physiology of sensations, and his acute epistemological analyses have lost nothing to-day of their significance. Historically, he initiated the movement of critical reaction against the shallow mechanistic materialism of the XIXth century, a movement which—in spite of occasional lapses into idealism—had a powerful progressive influence on the development of physics. Even Mach's famous 'error'—his fight against atomism—should not be judged (as is too often done) from the naive standpoint that 'the event put him in the wrong'. What he actually criticised was the unwarranted extrapolation by the atomists of mechanical concepts which after all only correspond to a limited class of macroscopic phenomena<sup>5</sup>. Is this so absurd? I will not fall into the opposite extreme of crediting Mach with prophetic vision: but for us, who currently use many-dimensional configuration space in our description of atomic systems, Mach's reflections on the application of spatial representations to such systems have a curiously modern flavour. Anyhow, it is characteristic for Mach's true scientific openmindedness that towards the end of his life (in 1903), after he had been shown a spinthariscopes, he exclaimed: 'Now I believe in the existence of atoms!'<sup>6</sup>

I am afraid, however, that Prof. Bernal is not really interested in understanding such nuances of individual attitudes to the problems of science and philosophy: for him, Mach is a positivist, and that's the end of it! This is just another example of that ruthless disregard for human personality which seems to be part of the author's philosophical outlook, and which strangely contrasts with his warm sympathy for people's collective fates and aspirations. Both these features become more and more prominent as we proceed through the last part of the book, leaving the comparatively quiet abodes of science for the stormy seas of economics and sociology. Here, too, the partisan note becomes shriller (which, incidentally, will frighten away just those readers for whom a soberer exposition would have been most instructive). Doctrines and people are presented in highly imaginative black-and-white pictures. A glowing indictment of our decaying world and an idealised vision of the growth of a new civilisation alternate in a medley of brilliant vistas and piquant irrelevancies, so dazzling as to remind us of the author's Irish origin. At the same time, there is in those pages so much sincerity and devotion, so much generous indignation, so much hope and faith, that one's reason silences its irritation and one's heart fills with sympathy and admiration for a forceful (if somewhat reckless) thinker and a lovable and courageous man.

L. Rosenfeld

1. See any edition of the correspondence of Marx and Engels.
2. See e. g., how Engels protests, in the preface to the *Anti-Dühring*, that he does not want to 'oppose another system to Herr Dühring's system'.
3. See e. g., L. Rosenfeld, Strife about complementarity, *Science Progress* 163 (1953) 393 for a discussion of the ideas of quantum mechanics from a dialectical point of view.
4. I had a shock recently when a distinguished French scientist, whom I had long before heard indulging in the usual vilification of Mach, told me that he had just started reading the *Mechanik*!
5. E. Mach, *Die Geschichte und die Wurzel des Satzes von der Erhaltung der Arbeit*, Prag 1872 (2. Aufl. Leipzig 1909, p. 26 seqq.).
6. S. Meyer, *Z. Naturforschung* 5a (1950) 407.

Roland H. Bainton: *Hunted Heretic. The Life and Death of Michael Servetus, 1511-1553*. Boston, The Beacon Press, 1953. 270 Seiten, 20 Abb., \$3,75.

Das Servet-Gedächtnisjahr 1953 hat wesentlich zur wissenschaftlichen Besinnung beigetragen und der Forschung neue Impulse gegeben. In den verschiedenen Veröffentlichungen dieses Jahres kommt das deutlich zum Ausdruck. In Holland erschien ein Sammelwerk, das 17 namhafte Beiträge über Servet und seine Zeit enthielt (Autour de Michel Servet et de Sebastien Castellion, hrsg. von Bruno Becker, Haarlem 1953), Professor John F. Fulton schilderte Leben und Leistung Servets und legte zusammen mit Madeline E. Stanton eine sehr exakt gearbeitete Bibliographie seiner Werke mit Standortübersicht vor (Fulton: Michael Servetus. Humanist and Martyr. With a bibliography of his works and census of known copies by Madeline E. Stanton, New York 1953), Servets geographische, medizinische und astrologische Schriften wurden ins Englische übersetzt und kommentiert (Charles D. O'Malley: Michael Servetus. A translation of his geographical, medical and astrological writings with introductions and notes, Philadelphia 1953), E. F. Podach ging eingehend der wechselvollen Geschichte der einzelnen erhaltenen Exemplare der 'Christianismi restitutio' (Vienne 1553) nach (in: Die Medizinische, Jg. 1953, S. 1399-1403) und der Prozeß in Vienne im März/April des Jahres 1553 war Gegenstand monographischer Veröffentlichung (Pierre Cavard: Le procès de Michel Servet à Vienne, Vienne 1953).

Das vorliegende Werk von Roland H. Bainton ist der wertvollste und eingehendste Beitrag, der theologischerseits zur Erinnerung an Servet geleistet wurde. Der Verfasser ist Professor für Kirchengeschichte an der Yale University und ein besonderer Kenner der Reformationszeit. Seine außerordentliche große Sachkenntnis kommt dem vorliegenden Buche im

vollen Maße zugute. Bainton erörtert eingehend die Stellung des Spaniers im religiösen Leben seiner Zeit. An einer der Grundlehren der Kirche, der Trinitätsidee, nahm Servet zuerst Anstoß. Er befaßte sich eingehend mit den früheren Autoritäten zu dieser Frage, Richard von St. Victor, Wilhelm von Occam, Robert Holcot, Pierre D'Ailly, Gregor von Rimini und John Major, und kam zu dem Schluß, daß die Trinitätsidee abzulehnen sei. Kirchliche Verfolgung ließ es ratsam erscheinen, unter einem Pseudonym zu leben. In seiner encyclopädischen Vielseitigkeit gab Servet u. a. auch geographische Werke heraus, studierte und praktizierte Medizin. Seinen Lehrer Symphorien Champier (1472–1539) verteidigte er gegen den Tübinger Botaniker Leonhard Fuchs (1501–1566) und schrieb eine Schrift über die Syrupe, die mehrere Auflagen erlebte. Bainton hat die ärztliche Leistung des Servet nicht unberücksichtigt gelassen, schildert jedoch ausführlicher seine religiösen und theologischen Ansichten, am Schluß besonders eingehend den Verlauf des Prozesses in Genf.

Der Medizinhistoriker braucht das Werk von Bainton dringend, wenn er zu einer vollen Würdigung und Gesamtschau dieses so vielfältig interessanten Mannes kommen will. Lediglich in der Frage der religiösen Toleranz hätte man gewünscht, wenn der Autor deutlicher Stellung bezogen hätte. Bei allen Entschuldigungen, die man für Calvin heranziehen mag, bin ich der Ansicht, daß die Darstellung von Bainton um etliche Nuancen zu calvin-freundlich ausgefallen ist.

Gegen Schluß des Buches sind auf 17 Seiten in Auswahl die wichtigsten Publikationen über Servet zusammengestellt. Sie geben für weitere Arbeiten und Detailstudien bequem zugängliche Hinweise.

Kurt Quecke

Maurice Daumas: *Lavoisier, Théoricien et Expérimentateur*. Paris, Presses Universitaires de France, 1955.

While the time of origin of modern physics is rather ill-defined, modern chemistry may be said to have largely developed after 1770. Accordingly, a scientist as Lavoisier deserves a closer study as a possible initiator of the following, fruitful evolution. Maurice Daumas' biography makes a well-balanced picture of that possibility: Lavoisier was not "the founder" of chemistry, but he made extremely important contributions to its evolution. Daumas remarks that the questions of priority, e. g. as to the discovery of oxygen, have no meaning; communications were slow,

and several people were working on similar problems from entirely different theoretical points of view.

Lavoisier is most famous for his rejection of Stahl's theory of phlogiston. But Daumas correctly emphasizes that this was no mere change of sign; as electricity may be noted with an arbitrary sign, it might be preferred to call the oxidized or reduced form of a metal the element. Rather, the revolution consisted in clarifying the concept of "element" and weakening the concept of "principle". This revolution was by no means finished by Lavoisier, but he was very careful only to accept elements and principles compatible with the experiments. It must be taken *cum grano salis* that he was the first to use the analytical weighing method, but at least he found many arguments in support of its expediency. It must be remembered that this method is only useful if no products escape without being weighed. Therefore, Lavoisier was very interested in the study of gases, which had by now attracted the chemists, while the solid and liquid compounds had been the main interests of earlier students of chemistry. Since heat and light certainly escape in a chemical reaction, they must be without mass if the hypothesis of constant mass can be applied by chemists. Thus, Lavoisier provided the incentive to the many subtle experiments which were later performed to prove this hypothesis. On the other hand, Lavoisier used the calorimeter (e. g. the isothermic one with melting ice) so much that he was tempted to assume heat as an element. Daumas does not discuss the obvious argument advanced by phlogistonists that phlogiston might have a negative mass. The behaviour of organic liquids, whose combustibility rises at decreasing density, supports this assumption. Generally, the phlogiston controversy was only a part of the problem of element versus principle, which has always been a standing question in natural philosophy and chemistry. Either Nature is composed of a distinct number of elements (if very large, the chemical science would be nearly impossible) which can be separated and exhibited in labelled bottles; or Nature is intimately mixed up of properties which occur in any bit of material. The 19th century saw the triumphant victory of the 80 elements, each with a unique individuality and each with a constant of nature, an infinite decimal fraction, as its atomic weight. There were no means to destroy or change an element, and the small number of elements extracted from the earth were refound in the most distant stars by spectroscopy. This success was even more than predicted by Lavoisier; he did not feel that gold was an element; it was too rare. But according to our present knowledge, the elements are not unchange-

able, and they are assumed to consist of an integral number of elementary particles (protons, neutrons and electrons) which cannot easily be exhibited in a museum. Their properties classify them rather as principles.

The interaction between physics and chemistry is very interesting: Lavoisier wanted much to consider chemistry a deductive theory like geometry. But the chemical phenomena behaved very incalculably and still contained a mess of natural history. Through the whole of the 19th century, chemistry continued to be a challenge to Newton's physics: the selective powers of valency, their way of saturation and, finally, the line spectra, were entirely unexplained by physics. When the atomic and molecular theory emerged from quantum mechanics and its semi-empirical predecessors, it was customary to speak of chemistry as a special application of physics. But actually, the chemical ideas rather conquered physics and finally achieved a satisfactory connection with all experimental facts.

The quantum mechanics was in a special respect foreseen by Lavoisier, who made the very reasonable remark that it would be difficult to observe and measure the molecules because our eyes and instruments are themselves composed of molecules of the same size.

Daumas devotes a chapter to the very extensive series of investigations made by Lavoisier before the publication of "*Traité de Chimie*", the best text-book of the time. Two chapters describe the fine apparatuses and very elaborate experimental technique employed by Lavoisier for the investigation of combustion, fermentation and respiration. Very suitable for the public demonstrations were the analysis of mercuric nitrate into and its synthesis from mercury, oxygen, and nitrous oxide (since nitric acid was thought to be anhydrous, as later in Berzelius' theory of salts as composed of metal oxides and acid anhydrides; "oxygen" denotes acid-forming!).

It is pleasant that no political discussion is made of Lavoisier's regrettable fate as a tax-collector or of Priestley, the co-discoverer of oxygen, whose favourable opinion of the French Revolution brought him up against much trouble. The chronological tables, based on Lavoisier's numerous note-books, have been worked out with profound care. Lavoisier was a very active person in public life and made many contributions to the Academy. Daumas' book can be highly recommended to both chemists and physicists who take an interest in the history of the sciences and the connections between them.

Chr. Klixbüll Jørgensen